Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Parciales

Prof: Mario E. Almanza C.

Intensidad horaria: 5 horas Semanales.
80 horas al semestre.

Pérdidos del curso 20% en faltas x 16 horas.

Horario: 7-10 am B1 104 Martes
8-10 am B1 104 Miercoles

Corte 1:
- Parcial #1 30%
- Parcial #2 30%
- Quiz 20%
- Trabajos 20%

Hoja de Parcial cuadriculada doble para los Parciales.

Corte 2:
- Parcial #3 30%
- Parcial #4 30%
- Quiz 20%
- Trabajo 20%

Tel: 3165307728 asesorias: lunes 2-3

Contenido:

Parte I: E.D.O

- **Capitulo 1:** Introducción (conceptos Preliminares, terminología y notación).
- **Capitulo 2:** Ecuaciones de Primer orden (casos Particulares).
- **Capitulo 3:** E.D.O. de Primer orden lineales.
- **Capitulo 4:** Algunos Problemas físicos que conducen a E.D.O de primer orden.
- **Capitulo 5:** E.D.O de orden Superior.
- **Capitulo 6:** Algunos Problemas físicos que conducen a E.D.O. de Segundo orden.
- **Capitulo 7:** Transformada de LaPlace.

Escaneado con CamScanner

Parte II: E.D.P.

- Capitulo 1: Introducción (Conceptos Preliminares).
- Capitulo 2: Solución Para algunas E.D.P.
- Capitulo 3: Algunos Problemas físicos que Conducen a E.D.P.

Bibliografía:

- Boyce W.E and DiPrima R.C. "Elementary Differencial equations and Boundary Value Problems"
- Joha wiley and Sons 2012
- Ross S.L "Introducción a las ecuaciones diferenciales" 3r ed. Interamericana 1982.
- Avres f. "Ecuaciones diferenciales" Mc Graw-Hill. 1993
- Acosta M. y Emil R. "Introducción a las Ecuaciones Integrales".
- Unisucre 1993
- Dennis G. Zill 9na Ed. "Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado". Cengage learning.
- Apostol T. "Calculus" Vol I y II Revente 1988.

Parte I: E.D.O. (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias).

- Capitulo 1: Introducción.

Def: Ecuación Diferencial (E.D.)

Una ecuación diferencial involucra derivadas de una ó más variables dependientes con respecto a una o mas variables independientes es llamada "Ecuación diferencial" (E.D).

Ejemplos:

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$
2. $\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3t = \operatorname{sen} t$
3. $\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$

Escaneado con CamScanner

4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

* **Definición: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O).**

Una ecuación que involucra derivada "ordinaria" de una ó más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, es llamada "Ecuación Diferencial Ordinaria" (E.D.O).

* **Definición: Ecuaciones Diferenciales Parciales (E.D.P)**

Una ecuación que involucra derivadas de una ó mas variables dependientes con respecto a una o mas variables independientes se llama "ecuación Diferencial Parcial" (E.D.P)

Ejemplo: las ecuaciones:

- $\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$
- $\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3t = \operatorname{Sen} t$ Son E.D.O.S.

Las ecuaciones:

- $\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$
- $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$ Son E.D.P.s.

* **Definición: E.D.O. lineales:**

Se dice que una E.D.O. es lineal, si tiene la forma $a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \ldots$

$\ldots a_0(x)y = g(x)$ donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son funciones dependientes de x, al igual que g.

Si $g(x) = 0$, $\forall x$, se llama E.D.O lineal homogenea. Una ecuación diferencial ordinaria que no es lineal se llama no lineal.

Nota: Dada una E.D.O. lineal, su correspondiente E.D.O lineal homogenea en b que se ha hecho $g(x) = 0$, $\forall x$, se denomina lineal homogenea asociada.

Escaneado con CamScanner

Ejemplo: las ecuaciones:

- $\frac{dy}{dx} = 2x + y$ $\left(\frac{dy}{dx} - y = 2x,\ a_1(x) = 1,\ a_0(x) = -1,\ g(x) = 2x\right)$
- $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 15x = 0$
- $x^3 \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + x^2 \frac{dy}{dx} = xe^x$

Son E.D.O lineales. porque disminuye la derivada y porque tiene $g(x) = 0$

las ecuaciones:

- $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0$
- $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6y = 0$
- $\frac{d^2y}{dx^2} + 5y\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

No son lineales. porque no tiene $g(x) = 0$

* **Definición:** Solución de una E.D: una función es solución de una E.D. si sustituidas en dichas E.D. la reduce a una identidad, en otras palabras, si satisface la E.D.

Ejemplo: Verifique si las funciones determinadas por: (*) $x(t) = e^{5t}$

(**) $x(t) = e^{-3t}$

es solución de $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 15x = 0$

Solución: (*) Veamos que si $x(t) = e^{5t}$ es solución

$\Rightarrow x'(t) = 5e^{5t}$ $\Rightarrow 25e^{5t} - 2(5e^{5t}) - 15(e^{5t}) = 0$

$x''(t) = 25e^{5t}$ luego $x(t) = e^{5t}$ es solución de la E.D.

(1) (**) Veamos si $x(t) = e^{-3t}$ es solución de la E.D. (ejercicio).

(2) **Ejercicio:** • Determinar si $y = \frac{x^4}{16}$ es solución de la E.D. $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$

(3) • Determinar si $y = xe^x$ es solución de la E.D. $y'' - 2y' + y = 0$

Escaneado con CamScanner

Solución:

① Veamos si $x(t)=e^{-3t}$ es Sol. de la ED.

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-15x=0$$

Sol. Veamos que si $x(t)=e^{-3t}$ es solución.

$\Rightarrow x'(t)=-3e^{-3t}$

$x''(t)=9e^{-3t}$ $\Rightarrow 9e^{-3t}-2(-3e^{-3t})-15(e^{-3t})=0$

Luego $x(t)=e^{-3t}$ es solución de la E.D.

② Determinar si $y=\frac{x^4}{16}$ es Solución de la E.D. $\frac{dy}{dx}=xy^{1/2}$

Sol. Veamos que si $y=\frac{x^4}{16}$ es Solución:

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}x^3 \Rightarrow \frac{1}{4}x^3=xy^{1/2}$ No es solución de la E.D.

$\frac{1}{16}\cdot x^4=\frac{4}{16}x^3=\frac{1}{4}x^3$

③ Determinar si $y=xe^x$ es Solución de la E.D. $y''-2y'+y=0$

Sol. Veamos que si $y=xe^x$ es Solución.

$y'=xe^x$

$y''=xe^x$ $\Rightarrow xe^x-2(xe^x)+xe^x=0$

$xe^x-2xe^x+xe^x=0$

$2xe^x-2xe^x=0$ es Solución de la E.D.

② De otra forma:

Derivamos implícitamente a (*) $y=\frac{x^4}{16}$, y obtenemos:

$\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3}{16}\frac{dx}{dx}$,

$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3}{4} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x^3}{4}$

Luego reemplazamos (*) en $\frac{dy}{dx}=xy^{1/2}$ y obtenemos

$xy^{1/2}=x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2}=x\left(\sqrt{\frac{x^4}{16}}\right)=x\left(\frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{16}}\right)=x\left(\frac{x^2}{4}\right)=\frac{x^3}{4}$

Por lo tanto $y=\frac{x^4}{16}$ es solución de $\frac{dy}{dx}=xy^{1/2}$.

Escaneado con CamScanner

Definición: E.D.O en forma Implícita.

Decimos que una E.D.O está expresada en forma "implícita" cuando tiene la forma:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Ejemplo: La ecuación

$$F(x, y, y', y'') = \frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6x = 0$$ está en forma implícita.

Definición: E.D.O en forma Explícita.

Decimos que una E.D.O está en forma "explícita" cuando está expresada en la forma: $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)})$.

Ejemplo: La E.D.O

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 6x = f(x, y, y')$$

está en forma explícita.

↳ la mayor derivada tiene que quedar sola.

Ej: $x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 3x\frac{dy}{dx} = e^x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

$$k(x)^2 + cy = hy^2$$
$$kx^2 = hy^2 - cy$$
$$= y(yh - c)$$

Definición: Solución explícita de una E.D.O.

Una solución en que la variable dependiente se expresa solo en términos de la variable independiente, se llama solución explícita.

Ejemplo: La función definida por:

$$f(x) = 2\operatorname{sen}x + 3\cos x$$

es una solución explícita de la E.D.O

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad \forall x.$$

Escaneado con CamScanner

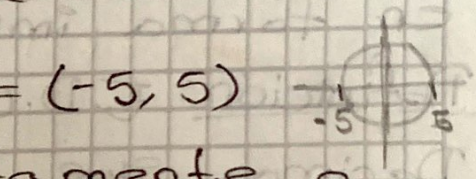
Consultar: ~~Problema~~ Teorema de valor inicial de existencia y unicidad para problema de valor inicial de primer orden.

Definición: Solución Implícita de una E.D.O.

Una relación $G(x,y)=0$ es solución implícita de una E.D.O, si existe al menos una función f que satisface la E.D.O y la relación G. (en otras palabras si $G(x,y)=0$ define implícitamente a f).

Ejemplo: la relación $x^2+y^2-25=0=G(x,y)$, es solución implícita de la ecuación diferencial ordinaria:

$$x+y\frac{dy}{dx}=0, \quad x\in I=(-5,5)$$



En efecto: G define implícitamente a

- $f_1(x)=\sqrt{25-x^2}$
- $f_2(x)=-\sqrt{25-x^2}$

es solución explícita.

ya que:

- $x^2+(f_1(x))^2=x^2+(\sqrt{25-x^2})^2-25$
  $=x^2+25-x^2-25=0$
- $x^2+(f_2(x))=x^2+(-\sqrt{25-x^2})^2-25$
  $=x^2+25-x^2-25=0$

Como $f_1'(x)=(25-x^2)^{1/2}=\frac{1}{2}(25-x^2)^{-1/2}(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$

tenemos reemplazando en la E.D.O que

$$x+(\sqrt{25-x^2})\left(\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}\right)=0$$

Por tanto $G(x,y)=x^2+y^2-25=0$ es Solución implícita de la E.D.O, en $I=(-5,5)$.

Ejercicio: Verifique si la relación $x^2+y^2+25=0$ es solución de la E.D.O: $x+y\frac{dy}{dx}=0$ en forma implícita.

- $f_1(x)=$
- $f_2(x)=$

Escaneado con CamScanner

Ejercicio:

Clasifique las siguientes E.D. Como ordinarias o Parciales; establesca el orden de cada ecuación y determine cuál ecuación es lineal y cual no.

1. $\frac{dy}{dx} + x^2 y = xe^x$: es lineal, ordinaria, de grado 1.

2. $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3y = \text{Sen } x$: es ordinaria de orden 3, no homogenea.

3. $x^2\,dy + y^2\,dx = 0$: $-\frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$ No es lineal, ordinaria, de orden 1.

4. $\frac{d^4y}{dx^4} + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + 5y = 0$: No es lineal, pero es ordinaria de orden 4.

5. $\frac{d^2y}{dx^2} + x \operatorname{Sen} y = 0$: No es lineal Porque esta afectada Por la variable independiente Sen.

6. $\frac{d^2y}{dx^2} + x \operatorname{sen} x = 0$: Si es lineal, de orden 2.

7. $\frac{d^6x}{dt^6} + \left(\frac{d^4x}{dt^4}\right)\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right) + x = t$: ordinaria, no lineal de orden 6.

8. $\left(\frac{dr}{ds}\right)^3 = \sqrt{\frac{d^2r}{ds^2} + 1}$ No ordinaria, no lineal de orden 2.

9. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$ — de orden 4. } parciales, no lineal

10. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ — de orden 2.

Nota: Las ecuaciones diferenciales ordinarias dependen de una Sola Variable Ej: $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2}$ y las ecuaciones diferenciales Parciales dependen de varias Variables Ej: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Escaneado con CamScanner

EJERCICIOS Pag. 71 y 72 de Ross.

1. Demuestre que cada una de las funciones definidas en la columna I es una solución de la ecuación diferencial correspondiente de la columna II, en cada intervalo $a<x<b$ del eje x.

I II

a) $f(x) = x + 3e^{-x}$ $\quad \frac{dy}{dx} + y = x + 1$.

Sol.

$f'(x) = 1 - 3e^{-x}$

$\rightarrow 1 - 3e^{-x} + (x + 3e^{-x}) = x + 1$ es solucion de la E.D.

b) $f(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x}$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = 0$

Sol.

$f'(x) = 6e^{3x} - 20e^{4x}$

$f''(x) = 18e^{3x} - 80e^{4x}$

$\rightarrow 18e^{3x} - 80e^{4x} - 7(6e^{3x} - 20e^{4x}) + 12(2e^{3x} - 5e^{4x})$

$\rightarrow 18e^{3x} - 80e^{4x} - 42e^{3x} + 140e^{4x} + 24e^{3x} - 60e^{4x} = 0$

c) $f(x) = e^x + 2x^2 + 6x + 7$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$

$f'(x) = e^x + 4x + 6$

$f''(x) = e^x + 4$

$\rightarrow e^x + 4 - 3(e^x + 4x + 6) + 2(e^x + 2x^2 + 6x + 7)$

$\rightarrow e^x + 4 - 3e^x - 12x - 18 + 2e^x + 4x^2 + 12x + 14$

$= 4x^2$ es solución de la E.D.

d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad (1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)\cdot 2x(-2x)}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)\left[-2(1+x^2) - 2\cdot 2x(-2x)\right]}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2-2x^2+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

Norma

Escaneado con CamScanner

$$\rightarrow (1+x^2)\left[\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\right]+4x\left[\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right]+2\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$\rightarrow \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^2}-\frac{8x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{6x^2-2-8x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{2}{1+x^2}$$

$$\rightarrow \frac{-2x^2-2}{(1+x^2)^2}+\frac{2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-2(x^2+1)}{(1+x^2)^2}+\frac{2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{1+x^2}+\frac{2}{1+x^2}=0$$

Luego $\frac{1}{1+x^2}$ es solución de la E.D.

2) Demuestre que $x^3+3xy^2=1$ es una solución implícita de la ecuación diferencial $2xy\left(\frac{dy}{dx}\right)+x^2+y^2=0$ en el intervalo $0<x<1$.

Sol.

Se deriva implicitamente:

$x^3+3xy^2=1 \qquad \frac{dy}{dx}=?$

$$3x^2+3y^2+3x\cdot 2y\cdot y'=0$$

$$3x\cdot 2y\cdot y'=-(3x^2+3y^2)$$

$$6y'xy=-3(x^2+y^2)$$

$$y'=\frac{-3(x^2+y^2)}{6xy}=\frac{-(x^2+y^2)}{2xy}$$

$$y'=\frac{-x^2-y^2}{2xy} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-x^2-y^2}{2xy}$$

$$\rightarrow 2xy\left(\frac{-x^2-y^2}{2xy}\right)+x^2+y^2=0$$

$$-x^2-y^2+x^2+y^2=0$$

Luego $x^3+3xy^2=1$ es solución de la E.D. en el intervalo $0<x<1$.

Escaneado con CamScanner

4) Demuestre que cada función f definida por $f(x)=C_1e^{4x}+C_2e^{-2x}$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, es una solución de la ecuación diferencial:

a) $$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-8y=0.$$

Sol. $f'(x)=4C_1e^{4x}-2C_2e^{-2x}$

$f''(x)=16C_1e^{4x}+4C_2e^{-2x}$

$\Rightarrow 16C_1e^{4x}+4C_2e^{-2x}-2(4C_1e^{4x}-2C_2e^{-2x})-8(C_1e^{4x}+C_2e^{-2x})$

$\Rightarrow 16C_1e^{4x}+4C_2e^{-2x}-8C_1e^{4x}+4C_2e^{-2x}-8C_1e^{4x}-8C_2e^{-2x}$

$=0$

3) A) Demuestre que cada función f definida por $f(x)=(x^3+c)e^{-3x}$ donde c es una constante arbitraria, es una solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}+3y=3x^2e^{-3x}$

Sol:

$f'(x)=3x^2e^{-3x}-3e^{-3x}(x^3+c)$

$\Rightarrow 3x^2e^{-3x}-3x^3e^{-3x}-c\cdot 3e^{-3x}$

$\Rightarrow 3x^2e^{-3x}-3x^3e^{-3x}-c\cdot 3e^{-3x}+3[(x^3+c)e^{-3x}]$

$3x^2e^{-3x}-3x^3e^{-3x}-c3e^{3x}+3x^3e^{-3x}+3\cdot ce^{-3x}$

$=3x^2e^{-3x}$ ✓

B) Demuestre que cada función f definida por:

$$f(x)=2+ce^{-2x^2}$$

donde C es una constante arbitraria, es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}+4xy=8x$$

Sol.

$f'(x)=-4xce^{-2x^2}$

$\Rightarrow -4xce^{-2x^2}+4x(2+ce^{-2x^2})$

$\Rightarrow -4xce^{-2x^2}+8x+4ce^{-2x^2}$

$=8x$ ✓

Escaneado con CamScanner

Consultar:

Teorema del Valor inicial de existencia y unicidad Para Problemas de valor inicial de Primer orden. (1.28)

Considere la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ donde

1. la función f es una función continua de x y y en algún dominio D del Plano xy.

2. la derivada Parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ es también una función continua de x y y en D, y se da Por: (x_0, y_0) un Punto de D.

Concuación: Existe una Sowción única ϕ de la ecuación diferencial (1.28) definida en algún intervalo $|x-x_0| \leq h$ donde h es suficientemente Pequeña, que satisface la condición $\phi(x_0) = y_0$

Notas explicativas: Este teorema básico es el Primer teorema de la teoría de las ecuaciones diferenciales que estudiaremos.

1. se trata de un teorema de existencia y unicidad. Esto quiere decir que se trata de un teorema que asegura que bajo ciertas condiciones (establecidas en la hipotesis) algo existe (la sowción descrita en la conclusión) y es única (hay solamente una sowción). Esto sugiere respecto de como hallar esta sowción sino meramente afirma que el Problema tiene una sowción.

2. La hipotesis indica que se requieren condiciones de las cantidades que intervienen. Esto tiene que ver con dos cosas: la ecuación diferencial (1.28) y el Punto (x_0, y_0). Porque se refiere a la ecuación diferencial (1.28), la hipótesis exige que ambas la función f y la función $\frac{\partial f}{\partial y}$ (que se obtiene al derivar Parcialmente $f(x,y)$ con respecto a y), debe ser continua en algún dominio D, donde f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ tienen buen Comportamiento (es decir, continuo).

3. La conclusión dice de aquello de que se Puede tener seguridad cuando sea satisfecha la hipótesis establecida. Este Punto indica que se tiene la certeza de que existe una y sólo una sowción ϕ de la ecuación, que está definida en algún intervalo $|x-x_0| \leq h$ con centro en x_0

Escaneado con CamScanner

y que toma el valor y_0 cuando x tiene el valor x_0. Es decir, dice que, bajo hipótesis dada sobre $f(x,y)$, el Problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$y(x_0) = y_0,$$

tiene una solución única que es válida en algún intervalo en torno al punto inicial x_0.

4. La demostración de este teorema se omite.

5. El valor de un teorema de existencia requiere un poco de atención. Uno se podría preguntar, ¿Para qué puede servir sino dice como obtener la solución? La respuesta a esta pregunta es muy sencilla: un teorema de existencia asegura que ¡existe una solución y puede buscarse! Esto podría evitar pérdida de tiempo, energía y aún dinero al intentar determinar una solución cuando en realidad ¡no existe solución que pueda encontrarse! Por lo que respecta al valor que tiene la unicidad, podría representar un ahorro de tiempo y energía si se determina una solución particular y se sabe más adelante que existen otras y se halló ¡precisamente la que no deseaba!

▸**Ejemplo 1.15:** Considere el Problema de Valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(1) = 3.$$

Se aplica el teorema 1.1. Primero se comprueba la hipótesis. Aquí $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y$. Ambas funciones f y $\partial f/\partial y$ son continuas en todo dominio D del plano xy.

La condición inicial $y(1) = 3$ significa que $x_0 = 1$ y $y_0 = 3$, y el punto $(1,3)$ ciertamente está en algún dominio D. En consecuencia, todas las hipótesis se han satisfecho y la conclusión se cumple: es decir hay una solución única ϕ de la ecuación $dy/dx = x^2 + y^2$, definida en algún intervalo $|x-1| \leq h$ en torno de $x_0 = 1$, que satisface la condición inicial, es decir, que es tal que $\phi(1) = 3$.

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 1.76. Considere los dos problemas

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}}$, $y(1) = 2$. 2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}}$, $y(0) = 2$.

Aquí $f(x,y) = \frac{y}{x^{1/2}}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x^{1/2}}$.

Estas funciones son continuas excepto para $x = 0$ (es decir, a lo largo del eje y). En el Problema 1, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. El cuadrado del lado 1 con centro en (1, 2) no contiene al eje y, y así ambas f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ satisfacen la hipótesis referida en este cuadro. su interior, por lo tanto, puede ser tomado como el dominio D del teorema 1.1; y (1,2) ciertamente en su interior. Por lo tanto, la conclusión del teorema 1.1 se aplica al Problema 1. y sacamos que el problema tiene una solución única definida en algún intervalo suficientemente pequeño alrededor de $x_0 = 1$.

Regresamos al Problema 2. Aquí $x_0 = 0, y_0 = 2$ En este punto ni f ni $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas.

En otras palabras, el punto (0,2) no puede estar incluido en un dominio D donde las hipotesis referidas se satisfagan. Entonces no podemos concluir, del teorema 1 que el Problema 2 tenga una solución. No estamos afirmando que no tenga una; el teorema 1.1, no da afirmación en un sentido u otro!

(1) con los criterios de la derivada graficar: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

(2) Calcular $\int x^2 \cos x \, dx$

Sol $\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$

$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \operatorname{sen} x - \int 2x \operatorname{sen} x \, dx$

$= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x + \int 2 \cos x \, dx$

$= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x + 2 \int \cos x \, dx$

$= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x + 2 \operatorname{sen} x + c$

Escaneado con CamScanner

Definición: Solución general de una E.D.O 8 Agosto 17

Sea $f(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}) = 0$ (*) una E.D.O. una solución de (*) que contiene n constantes arbitrarias es llamada una solución general de (*).

- **Ejemplo:** la función $x(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-3t}$ donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias es solución general de la E.D:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 15x = 0$$

En efecto:

$$\frac{dx}{dt} = 5C_1 e^{5t} - 3C_2 e^{-3t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 25C_1 e^{5t} + 9C_2 e^{-3t}$$

$$\Rightarrow (25C_1 e^{5t} + 9C_2 e^{-3t}) - 2(5C_1 e^{5t} - 3C_2 e^{-3t}) - 15(C_1 e^{5t} + C_2 e^{-3t})$$

$$\Rightarrow 25C_1 e^{5t} - 25e^{5t}C_1 + 9C_2 e^{-3t} - 9C_2 e^{-3t} = 0$$

- **Ejemplo:** la función $f(x) = x^2 + C$ es una solución general de $y' = 2x$. $y = x^2 + C$

Ejercicio: ✱ Verificar si la función $y =$

$f(t) = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$ es solución de $y'' + y = 0$ sol. $y' = C_1 \cos x - C_2 \operatorname{sen} x$, $y'' = -C_1 \operatorname{sen} x - C_2 \cos x \Rightarrow -C_1 \operatorname{sen} x - C_2 \cos x + C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x = 0$

✱ Verifique si la función

$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \operatorname{Sen} x + C_4 \cos x$

es solución de $y^{(4)} - y = 0$ $y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 \cos x - C_4 \operatorname{sen} x$, $y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \operatorname{sen} x - C_4 \cos x$, $y''' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x$, $y''' = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \operatorname{sen} x + C_4 \cos x - C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \operatorname{sen} x - C_4 \cos x = 0$

Definición: una solución de una E.D.O. que se obtiene de una solución general dando valor particular a una o más constantes arbitrarias de la solución general, es llamada "solución particular".

Escaneado con CamScanner

• **Ejemplo:**

Vimos que $x(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-3t}$ es solución general $y'' - 2y' - 15x = 0$

Si tomamos $c_1 = 2$ y $c_2 = 0$, tenemos la solución particular $x(t) = 2e^{5t}$.

En efecto $x(t) = 2e^{5t}$ es una solución, ya que $x'(t) = 10e^{5t}$

$x''(t) = 50e^{5t}$

$x(t) = y$

$x'(t) = y'$

$x''(t) = y''(t)$

$\Rightarrow (50e^{5t}) - 2(10e^{5t}) - 15(2e^{5t}) = 0$

$50e^{5t} - 20e^{5t} - 30e^{5t} = 0$

Definición: Si una solución de una E.D.O no se puede obtener de una solución general, es llamada "solución singular".

• **Ejemplo:** Consideremos la E.D.O

$$y' = x y^{1/2}$$

Una solución genera de la E.D es:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)^2$$

En efecto: $y' = 2\left(\frac{x^2}{2} + c\right)^{\frac{x}{1/2}}$

$$x y^{1/2} = x\left[\left(\frac{x^2}{2} + c\right)^2\right]^{1/2} = x\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

Nota: No es solución, Para que sea solución: se agrega a $y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)^2$ en efecto: $y' = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)x$

$\Rightarrow x y^{1/2} = x\left[\left(\frac{x^2}{2} + c\right)^2\right]^{1/2} = x\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$

$y(x) = 0$, $\forall x$, es una solución singular, Puesto que no se obtiene de la solución general dando un valor a "c".

Problemas de Valor Inicial (P.V.I)

En algún intervalo I que contenga a x_0, el Problema:

$$\begin{cases} \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ y''(x_0) = y_2 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Escaneado con CamScanner

En donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes específicas se llama problema de valor inicial (P.V.I).

En particular, ✱ Si $n=1$ tenemos:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

✱ Si $n=2$, tenemos:

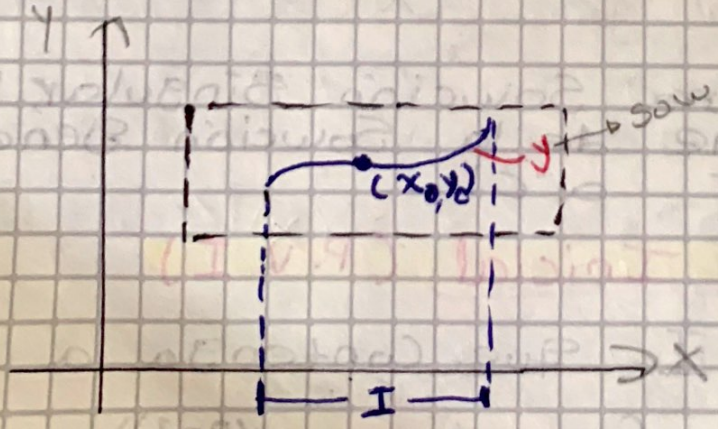
$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Teorema: (Existencia y unicidad de soluciones).

Suponjamos que la función $f(x,y)$ como su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en algún rectangulo R del plano XY que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior. Entonces, para algún intervalo abierto I contiene a x_0, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene una única solución en I.



Escaneado con CamScanner

Ejemplo: Consideremos el P.V.I.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x+3 \\ y(1)=2 \end{cases}$$

x_0 y_0

$y(x) = x^2+3x+C$

Como $f(x,y) = 2x+3$, es continúa en todo $\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, también es continúa en $\mathbb{R}^2$, Por el teorema, Para algún intervalo abierto I, tal que $1 \in I$, el P.V.I tiene única Solución que Pasa Por $(1,2)$.

Una Solución General de la E.D.

$$2 = y(x) = x^2+3x+C \qquad C = 2-4 = -2$$

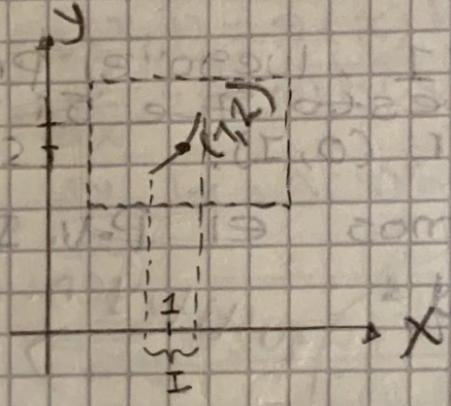
$$1+3+C = 2$$

Como $y(1)=2$, entonces $(1)^2+3(1)+C=2$

$x=1 \wedge y=2$

$$\boxed{C=-2}$$

Luego $y(x)=x^2+3x-2$, es la Solución al P.V.I.



Ejemplo: Consideremos el P.V.I

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

Como $f(x,y)=y^2$ es continúa en $\mathbb{R}^2$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ también es continúa en $\mathbb{R}^2$. Así, Por el teorema, el P.V.I tiene única Solución que Pasa Por el Punto $(0,1)$.

Veremos que una Solución General de la E.D

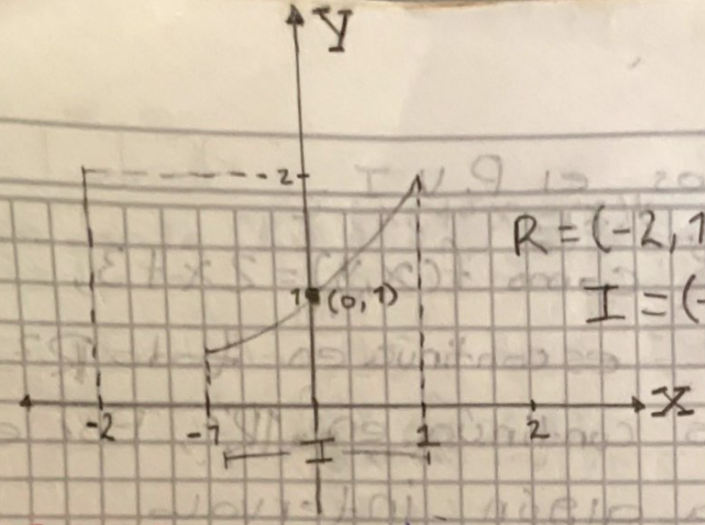
$$y(x) = \frac{1}{C-x}$$

Entonces $y(0) = \frac{1}{C-0} = 1 \Rightarrow \boxed{C=1}$

Así que la Solución al P.V.I es $y(t) = \frac{1}{1-x}$

no Puede tomar el valor de 1

Escaneado con CamScanner



$R = (-2,1) \times (0,2)$

$I = (-1,1)$

- **Ejemplo:** Consideremos el P.V.I.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

una Solución General es $y(x) = Cx^2$, ya que

$y'(x) = 2Cx \Rightarrow y' = 2(Cx)$ ✓

$f(x,y) = 2y$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$ Son continúas en todo $\mathbb{R}^2$.

Como $y(0) = C(0)^2 \neq 1$, luego el problema no tiene Solución Puesto que si $x=0$, ninguna Parabola Pasa Por $(0,1)$.

- **Ejemplo:** Consideremos el P.V.I.

$$\begin{cases} x\frac{dy}{dx} = 2y \\ y(0) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{sustituyen}} \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

Veamos si $\boxed{y(x) = Cx^2}$ es solución.

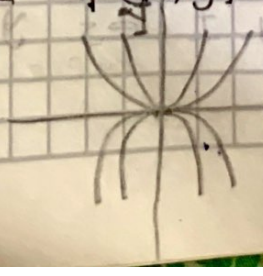
$y' = 2Cx \Rightarrow \boxed{xy' = 2Cx^2 = 2y}$, Luego

$y(x) = Cx^2$ es solución de la E.D.

- Si $C=0$, entonces $y(x) = 0$. es Solución del P.V.I.
- Si $C<0$, $y(x) = Cx^2$ es Solución, y si fijamos $C=k$, todas las Parabolas Satisfacen el P.V.I.

Analogamente si $C>0$ todas las Parabolas Satisfacen el P.V.I.

Note que $f(x,y) = \frac{2y}{x}$ no es continúa en $x=0$ porque no están en un rectangulo



Infinitas Soluciones que Pasan por $(0,0)$.

Escaneado con CamScanner

CAPITULO 2: ALGUNOS MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA E.D.O.

Variables Separables:

Una E.D.O $y' = f(x,y)$ es llamada de variable Separable si Podemos escribir a f en la forma $\boxed{f(x,y) = g(x)h(y)}$.

Nota: La notación de Leibniz $\frac{dz}{dw}$ es práctica a la hora de hacer los cálculos de Integración. con esta notación escribimos

$$\frac{dz}{dw}\,dw = dz$$

$f'(x) = f(x)$ $\quad \frac{df}{dx} = f(x)$

$F(x) = \int f(x)\,dx$ $\quad \frac{df}{dx}\,dx = f(x)\,dx$

$\int df(w) = \int f(x)\,dw$ (Leibniz)

"OJO" este no es una división es una notación.

Así, Podemos escribir:

$$\boxed{y' = f(x,y) = g(x)\,h(y)}$$

- $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$
- $\frac{dy}{dx}\,dx = g(x)h(y)$ (notación)
- $\frac{1}{h(y)}\,dy = g(x)\,dx$.

Ejemplo: Resuelve: $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -6xy \\ y(0) = 7 \end{cases}$ → Cuando dan valores iniciales hay que hallar el valor de C.

Solución:

Note que $\frac{dy}{dx} = -6xy$ es de variable Separable, ya que $f(x,y) = -6xy = g(x)h(y)$ donde $g(x) = -6x$ y $h(y) = y$

Luego, $\frac{1}{y}\,dy = -6x\,dx$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = -6\int x\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -3x^2$$

$$\Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{-3x^2+K} = e^{-3x^2}\cdot e^{K}$$

$$\Rightarrow |y| = Ce^{-3x^2}, \text{ donde } C = e^{K}$$

Si $y > 0$, entonces $\boxed{y = Ce^{-3x^2}}$

Como $y(0) = 7$, $Ce^{-3(0)^2} = 7$, entonces $\boxed{C = 7}$. Así $y = 7e^{-3x^2}$

Escaneado con CamScanner

Si $y<0$, entonces $-y = Ce^{-3x^2}$

Luego, si $y(0)=7$, entonces

$-Ce^{-3(0)^2} = 7$, $C=-7$

Luego $y = 7e^{-3x^2}$ Por tanto la solución al P.V.I es $\boxed{y = e^{-3x^2}}$

Ejercicio: Encuentre la solución de la E.D. de forma implícita $\frac{dy}{dx} = \frac{4-2x}{3y^2-5}$

Solución

Note que $\frac{dy}{dx} = \frac{4-2x}{3y^2-5}$ es de variable separable, ya que

$F(x,y) = \frac{4-2x}{3y^2-5} = g(x)h(x)$, donde $g(x) = 4-2x$ y $h(x) = \frac{1}{3y^2-5}$

Luego, $\left(\frac{1}{3y^2-5}\right)dy = (4-2x)dx$

$\rightarrow (3y^2-5)dy = (4-2x)dx$

$\int(3y^2-5)dy = \int(4-2x)dx$

$\int 3y^2\,dy - \int 5\,dy = \int 4\,dx - \int 2x\,dx$ → D.O de forma explícita

$y^3 - 5y = 4x - x^2 + C$

$y^3 = 4x - x^2 + 5y + C$ → saco raíz cúbica.

$y = \sqrt[3]{4x - x^2 + 5y + C}$

forma implícita es cuando no te da despejada la y. Pero cuando se despeja queda de forma explícita.

Escaneado con CamScanner

Ecuaciones que se Reducen a Separables

La ecuación $y' = f(ax+by)$ con a y b constantes se reduce a separable si hacemos $z = ax+by$. $z = y'$

Ejemplo: Resuelve: $y' - e^x e^y = -1$

Solución: Podemos escribir la ecuación en la forma: $y' = e^x e^y - 1$

$= e^{x+y} - 1$

tenemos: $y' = f(x+y) = e^{x+y} - 1$.

Sea $z = x+y \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$

Así, $\frac{dz}{dx} - 1 = e^z - 1 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = e^z \Rightarrow e^{-z}dz = dx$

$\frac{dz}{e^z} = dx \Rightarrow \int e^{-z}dz = \int dx$

Pasa el de exponente positivo para arriba $e^{-z}dz = dx$ pero con signo negativo.

$(-1) \Rightarrow -e^{-z} = x + C_1 \quad (-1)$, $C_2 = C_2$

$\Rightarrow e^{-z} = C_2 - x$

$\Rightarrow \ln e^{-z} = \ln|C_2 - x|$

$\Rightarrow -z = \ln|C_2 - x| \Rightarrow -x-y = \ln|C_2 - x|$

$\Rightarrow y = -\ln|C_2 - x| - x$

9-Ago-17

Ecuaciones homogéneas

Definición: Si una función $f(x,y)$ tiene la propiedad $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$ para $\alpha \in \mathbb{R}$, se dice que f es "homogénea" de grado α.

Si una E.D.O

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

cumple que: $f(tx,ty) = f(x,y)$

la E.D.O. se llama homogénea de grado cero.

Nota: Si una E.D.O está expresada en la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ y sus coeficientes M y N son homogéneas del mismo grado, es decir: $M(tx,ty) = M(x,y)$, $N(tx,ty) = N(x,y)$

Entonces al escribir la ecuación de la forma: $\frac{dy}{dx} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}$,

Escaneado con CamScanner

Así, si escribimos $f(x,y) = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}$, tenemos

$$f(tx,ty) = -\frac{N(tx,ty)}{M(tx,ty)} = -\frac{t^\alpha N(x,y)}{t^\alpha M(x,y)} = -t^{\alpha-\alpha}\frac{N(x,y)}{M(x,y)}$$

$$= -t^0 \frac{N(x,y)}{M(x,y)} = f(x,y)$$

Luego la E.D. dada es homogénea de grado cero

Ejemplo:

1) $f(x,y) = x^3 + y^3$ es homogénea de grado 3, ya que $f(tx,ty) = (tx)^3 + (ty)^3 = t^3(x^3+y^3)$

$$= t^3 f(x,y)$$

2) $F(x,y) = x^3 + y^3 + 1$ no es homogénea ya que

$$f(tx,ty) = t^3(x^3+y^3) + 1 = t^3 f(x,y) + 1$$

3) $f(x,y) = \frac{x}{y}\,\text{Sen}\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)$ es homogenea de grado cero, ya que

$$f(tx,ty) = \frac{tx}{ty}\,\text{Sen}\left(\frac{(tx)^2+(ty)^2}{(tx)^2-(ty)^2}\right) = \frac{x}{y}\,\text{sen}\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)$$

$$= f(x,y) \qquad = \frac{x}{y}\,\text{sen}\left(\frac{t^2x^2+t^2y^2}{t^2x^2-t^2y^2}\right) = \frac{x}{y}\,\text{sen}\left(\frac{t^2(x^2+y^2)}{t^2(x^2-y^2)}\right)$$

4) $f(x,y) = \ln x - \ln y$ es homogénea (¿Porque?)

Nota: Las E.D.O homogéneas de grado cero se reducen a una variable haciendo:

$$\boxed{y = vx} \qquad v = \frac{y}{x}$$

Ejemplo: Resolver:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(3y^2 - xy - x^2)}{x(x^2 + xy - 2y^2)}$$

Solución:

Veamos si $f(x,y) = -\frac{y(3y^2-xy-x^2)}{x(x^2+xy-2y^2)}$ es homogénea.

$$f(tx,ty) = -\frac{(ty)[3(ty)^2 - (tx)(ty) - (tx)^2]}{(tx)[(tx)^2 + (tx)(ty) - 2(ty)^2]}$$

Escaneado con CamScanner

$$= -\frac{t^3 y(3y^2 - xy - x^2)}{t^3 x(x^2 + xy - 2y^2)} = f(x,y)$$

Luego f es homogénea de grado Cero.

④ Sea $y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ → la derivada de "v" es $\frac{dv}{dx}$

Convertir a variables separables: Queda:

$$v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{vx[3(vx)^2 - x(vx) - x^2]}{x[x^2 + x(vx) - 2(vx)^2]}$$

$$= -\frac{v(3v^2 - v - 1)}{1 + v - 2v^2}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = -\frac{v(3v^2 - v - 1)}{1 + v - 2v^2} - \frac{v}{1}$$

$$= \frac{-v(3v^2 - v - 1) - v(1 + v - 2v^2)}{1 + v - 2v^2}$$

$$= \frac{-3v^3 + v^2 + v - v - v^2 + 2v^3}{1 + v - 2v^2}$$

$$= \frac{-3v^3 + 2v^2}{1 + v - 2v^2} = \frac{-v^3}{1 + v - 2v^2}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^3}{1 + v - 2v^2}$$

$$\Rightarrow (1 + v - 2v^2)x\frac{dv}{dx} = \frac{(1 + v - 2v^2)(-v^3)}{(1 + v - 2v^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-v^3}(1 + v - 2v^2)x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^3}{-v^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + v - 2v^2}{-v^3}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + v - 2v^2}{-v^3}dv = \frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{v^3} - \frac{1}{v^2} + \frac{2}{v}\right)dv = \frac{1}{x}dx$$

Escaneado con CamScanner

$$\Rightarrow -\int \frac{1}{v^3}dv - \int \frac{1}{v^2}dv + 2\int \frac{1}{v}dx = \int \frac{1}{x}dx$$

$$-\int v^{-3}dv - \int v^{-2}dv + 2\int \frac{1}{v}dx = \int \frac{1}{x}dx$$

$$-\frac{v^{-2}}{-2} - \frac{v^{-1}}{-1} + 2\ln|v| = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2v^2} + \frac{1}{v} + 2\ln|v| = \ln|x| + C$$

Como $v = \frac{y}{x}$, entonces

$$\frac{1}{2(\frac{y}{x})^2} + \frac{1}{\frac{y}{x}} + 2\ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + C$$

Por Propiedad de Log: $K\log = \log^K$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2y^2} + \frac{x}{y} = \ln|x| - \ln\left|\frac{y}{x}\right|^2 + C$$

$\log_a b = \frac{\log a}{\log b}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2y^2} + \frac{x}{y} = \ln\frac{|x|}{\left|\frac{y}{x}\right|^2} + C \quad \text{(Implícita)}.$$

Ecuaciones reducibles a homogéneas.

Consideremos la E.D:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$$

Caso I: Si las rectas determinadas por $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $ax + by + c = 0$ se cortan en (x_0, y_0), hacemos la Sustitución

$$X = x - x_0$$
$$Y = y - y_0$$

Caso II: Si las rectas determinadas por $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $ax + by + c = 0$ son Paralelas, hacemos:

$$\boxed{Z = ax + by}$$

Escaneado con CamScanner

Ejemplo: Resolver la E.D.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-5y+3}{5x-12y+8} \quad (\checkmark)$$

Solución:

- Las rectas: $\begin{cases} 2x-5y+3=0 \therefore l_1 \\ 5x-12y+8=0 \therefore l_2 \end{cases}$

No son Paralelos, Puesto que no existe $K \neq 0$ tal que $\langle 2,-5\rangle = K\langle 5,-12\rangle$.

- Determinemos el Punto de corte (x_0, y_0) de las rectas.

De l_1 $\boxed{x = \frac{5y-3}{2}}$ (*) Despejamos x en l_1:

Reemplazando en l_2, tenemos que:

$$5\left(\frac{5y-3}{2}\right) - 12y + 8 = 0 \quad = \frac{25y-15}{2} - 12y + 8 = 0$$

$= 25y - 15 - 24y + 16 = 0 \times 2 \Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$

despejando y x queda: se reemplaza en (*) $x = \frac{5(-1)-3}{2} = \frac{-5-3}{2}$

$\Rightarrow y = -1$ y $x = -4$ $\quad x = -8/2$

$x = -4$

- Sea $\begin{cases} X = x+4 \\ Y = y+1 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} y+1=0 \\ x+4=0 \end{matrix}$

$x = X-4$

$y = Y-1$

Así, $dX = dx$ y $dY = dy$, $x = X-4$, $y = Y-1$,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}$$

Reemplazamos x y y en (✓)

Así, escribimos la E.D en forma:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2(X-4)-5(Y-1)+3}{5(X-4)-12(Y-1)+8}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X-5Y}{5X-12Y}$$

- Sea $g(X,Y) = \frac{2X-5Y}{5X-12Y}$, entonces

Por definición: $F(x,y) = \frac{dy}{dx}$

Escaneado con CamScanner

- $g(tX, tY) = \frac{2(tX)-5(tY)}{5(tX)-12(tY)} = \frac{2X-5Y}{5X-12Y} = g(X,Y)$

Luego g es homogénea de grado cero

- Sea $\boxed{Y = VX} \Rightarrow \boxed{\frac{dY}{dX} = V + X\frac{dV}{dX}}$

$$\Rightarrow V + X\frac{dV}{dX} = \frac{2X-5(VX)}{5X-12(VX)} = \frac{2-5V}{5-12V}$$

$$\Rightarrow X\frac{dV}{dX} = \frac{2-5V}{5-12V} - V = \frac{2-5V-V(5-12V)}{5-12V} = \frac{2-10V+12V^2}{5-12V}$$

$$\Rightarrow \frac{5-12V}{2-10V+12V^2}\,dV = \frac{1}{X}\,dX$$

$$\Rightarrow \int \frac{5-12V}{2-10V+12V^2}\,dV = \int \frac{1}{X}\,dX$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{5-12V}{-1+5V-6V^2}\,dV = \int \frac{1}{X}\,dX$$

$u = -1+5V-6V^2, \quad du = 5-12V$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{X}\,dX$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|u| = \ln|X| + c$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|-1+5V-6V^2| = \ln|X| + c$$

$|a-b| = |b-a|$ Por Propiedades del valor absoluto.

Ahora con $V = \frac{Y}{X}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|-1+5\left(\frac{Y}{X}\right)-6\left(\frac{Y}{X}\right)^2\right| = \ln|X| + c$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|1-5\left(\frac{Y}{X}\right)+6\left(\frac{Y}{X}\right)^2\right| = \ln|X| + c$$

Por Propiedades del logaritmo: $k\log = \log^k \Rightarrow$

$$e^{\ln\left|1-5\left(\frac{Y}{X}\right)+6\left(\frac{Y}{X}\right)^2\right|} = e^{\ln|X|^{-2}+c} = e^{\ln|X|^{-2}}\cdot e^c$$

$$\Rightarrow \left|1-5\left(\frac{Y}{X}\right)+6\left(\frac{Y}{X}\right)^2\right| = |X|^{-2}k \qquad k = e^c$$

Si: $1-5\left(\frac{Y}{X}\right)+6\left(\frac{Y}{X}\right)^2 > 0$ Entonces:

$$\Rightarrow 1-5\left(\frac{Y}{X}\right)+6\left(\frac{Y}{X}\right)^2 = \frac{k}{X^2}$$

Escaneado con CamScanner

$\Rightarrow x^2 - 5xy + 6y^2 = k$ factorizar Por Completación de Cuadrado.

$\Rightarrow x^2 - 3xy - 2xy + 6y^2 = k$

$x(x-3y) - 2y(x-3y) = k$

$(x-2y)(x-3y) = k$

DD 15 MM 08 AA 17

$\Rightarrow$ Reemplazando los valores de: $X = x+4$ y $Y = y+1$.

se tiene:

$\Rightarrow [(x+4) - 2(y+1)][(x+4) - 3(y+1)] = k$

$\Rightarrow (x-2y+2)(x-3y+1) = k$ (Implícita).

Ejercicios: Resolver:

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+2y-1}{-x-y+2}$ 2) $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{6x-4y-3}{3x+y-1}\right)^2 - 2\left(\frac{6x+4y-3}{3x+y-1}\right)$

Ecuaciones exactas:

Definición: Si f es una función de dos variables, y si f es diferenciable en (x,y), entonces la "diferencial total" de f es la función df dada Por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

si $F(x,y) = C$, entonces: $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$ (*)

que es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

Nuestro Problema es ahora, dada una ecuación como (*) encontrar $f(x,y)$

Definición: (E.D. exacta)

Una E.D.O $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Es llamada exacta si: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Escaneado con CamScanner

Ejemplo: Resolver:

$$-\frac{(2x\tan y+\operatorname{sen} 2y)}{(x^2\sec^2 y+2x\cos 2y-e^y)}=\frac{dy}{dx}$$

Solución:

$$-(2x\tan y+\operatorname{sen}2y)dx=(x^2\sec^2 y+2x\cos 2y-e^y)dy$$

$$(-1)\cdot -(2x\tan y+\operatorname{sen}2y)dx-(x^2\sec^2 y+2x\cos 2y-e^y)dy=0$$

$$(2x\tan y+\operatorname{sen}2y)dx+(x^2\sec^2 y+2x\cos 2y-e^y)dy=0$$

Sean $M(x,y)=2x\tan y+\operatorname{sen}2y$ etc.

$\therefore N(x,y)=x^2\sec^2 y+2x\cos 2y-e^y$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=2x\sec^2 y+2\cos 2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=2x\sec^2 y+2\cos 2y$$

Es decir $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, luego la E.D. es exacta

Queremos encontrar $f(x,y)=C$ que satisface la E.D.

Sea $f(x,y)=\int M(x,y)\,dx$

$$=\int 2x\tan y+\operatorname{sen}2y\,dx$$

$$=x^2\tan y+x\operatorname{sen}2y+h(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2\sec^2 y+2x\cos 2y+h'(y)$$

Sea $N(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}\Rightarrow$

$$x^2\sec^2 y+2x\cos 2y-e^y=x^2\sec^2 y+2x\cos 2y+h'(y)$$

$$\Rightarrow h'(y)=-e^y$$

$$h(y)=-e^y$$

Luego $\boxed{F(x,y)=x^2\tan y+x\operatorname{sen}2y-e^y=C}$ derivar implícitamente

(verifique que esta es solución de la E.D.

Escaneado con CamScanner

Traer libro de E. Edif. Proxima clase. < EC. de Bernoulli y de Ricatti.

DD MM AA 16 08 17

Ecuaciones que se reducen a exactas con un factor integrante.

• **Definición:** Un factor que hace exacta a una E.D se llama "factor integrante".

Es decir, si la E.D. $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ no es exacta, pero $\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$ es exacta, entonces $\mu(x,y)$ es llamado un factor integrante.

Ejemplo: Verifique que si $\mu(x,y) = (1-x)^{-2}$ es un factor integrante de $(1+y)dx + (1-x)dy = 0$

Solución: Sean: $M(x,y) = 1+y$
$N(x,y) = 1-x$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \wedge \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, luego la E.D. NO es exacta.

Sea $\mu(x,y) = (1-x)^{-2}$

$\Rightarrow (1-x)^{-2}(1+y)dx + (1-x)^{-1}dy = 0$ (*) y

$M(x,y) = (1-x)^{-2}(1+y)$, $N(x,y) = (1-x)^{-1}$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = (1-x)^{-2} = \frac{\partial N}{\partial x}$, luego (*) es exacta.

terminar la con las integrales

Escaneado con CamScanner

Nota: No siempre se puede hallar un factor integrante, pero existen algunos casos en que se puede determinar.

Ejemplo: Si $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ no es exacta, pero:

a) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$ (función de x),

entonces $e^{\int f(x)dx}$ es un factor integrante.

b) Si $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = -g(y)$ (función de y)

entonces $e^{\int g(y)dy}$ es un factor integrante.

Ejemplo: Resolver la siguiente E.D.

$$(x^2+y^2+x)\,dx + xy\,dy = 0$$

Solución:

Sean $M(x,y) = x^2+y^2+x$

$N(x,y) = xy$

$\Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad \wedge \quad \dfrac{\partial N}{\partial x} = y \quad \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$,

Luego la E.D. No es exacta.

- Sea: $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \dfrac{2y-y}{xy} = \dfrac{y}{xy} = \dfrac{1}{x}$,

Así: $e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln|x|} = x$ es un factor integrante.

$\Rightarrow x(x^2+y^2+x)\,dx + x^2y\,dx = 0$ (*)

$\Rightarrow M(x,y) = x^3 + xy^2 + x^2, \quad N(x,y) = x^2y$

$\Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2xy \quad \wedge \quad \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2xy$

$\Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$. Luego (*) es exacta.

Sea $f(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int (x^3+xy^2+x^2)\,dx$

$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3 + h(y)$

Escaneado con CamScanner

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 y + h'(y)$

Sea $N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow$ sea $x^2 y + h'(y) = x^2 y$

$\Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = K$

Luego, $F(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + K = C_1$ (Implícita)

$$\boxed{F(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^3}{3} = C}$$

Se deriva implícitamente:

$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{2}(2xy^2 + 2x^2 y \cdot y') + x^2 = 0$

$\Rightarrow x^3 + xy^2 + x^2 y \frac{dy}{dx} + x^2 = 0$

$\Rightarrow x^3 + xy^2 + x^2 = -x^2 y \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow (x^3 + xy^2 + x^2)\,dx + x^2 y\,dy = 0$

$\Rightarrow x(x^2 + y^2 + x)\,dx + x^2 y\,dy = 0$

Por lo tanto $F(x,y)$ es solución de la ecuación diferencial.

Solución de una E.D.O lineal de Primer orden.

Recordemos que una E.D.O lineal de Primer orden tiene la forma:

$$a_1(x) y' + a_0(x) y = g(x)$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma:

$$y' + \frac{a_0(x)}{a_1(x)} y = \frac{g(x)}{a_1(x)}, \quad a_1(x) \neq 0$$

$$\boxed{y' + P(x) y = Q(x)}$$

$P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$

$Q(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$

Escaneado con CamScanner

Ejemplo: Resolver

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{2x+1}{x}\right)y=e^{-2x}$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{-2x}-\left(\frac{2x+1}{x}\right)y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[e^{-2x}-\left(\frac{2x+1}{x}\right)y\right]dx-dy=0$$

Sean: $M(x,y)=e^{-2x}-\left(\frac{2x+1}{x}\right)y$, $N(x,y)=-1$.

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=-\left(\frac{2x+1}{x}\right)$ $\wedge$ $\frac{\partial N}{\partial x}=0$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$, luego la E.D. no es exacta.

$$\Rightarrow \mu(x,y)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{\left(\frac{2x+1}{x}\right)-0}{-1}=\frac{2x+1}{x}$$

Así $\mu(x,y)=e^{\int\left(\frac{2x+1}{x}\right)dx}=e^{\int\frac{2x}{x}+\int\frac{dx}{x}}$

$=e^{2x+\ln(x)}=xe^{2x}$ → es factor integrante

$$\Rightarrow \boxed{\mu(x,y)=xe^{2x}}$$

$$\Rightarrow xe^{2x}\left[e^{-2x}-\left(\frac{2x+1}{x}\right)y\right]dx-xe^{2x}(-1)dy=0$$

producto

$$\Rightarrow \left[x-(2x+1)e^{2x}y\right]dx+xe^{2x}dy=0$$

derivar con respecto a y y a x

Integrar con respecto a X

Pág 43

Escaneado con CamScanner

Consulta

Ecuaciones de Bernoulli

Consideremos ahora un tipo especial de ecuación que se puede reducir a una ecuación lineal mediante una transformación especial; esta es la ecuación de Bernoulli.

Definición: Una ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (2.37)$$

se llama ecuación diferencial de Bernoulli.

Se puede observar que si $n=0$ o bien 1, entonces la ecuación de Bernoulli (2.37) es en realidad una ecuación lineal y, por lo tanto, se puede resolver fácilmente; sin embargo, es el caso general en que $n \neq 0$, o bien 1, este caso sencillo debe manejarse de manera diferente. Vamos a enunciar y demostrar el teorema 2.5, que nos dará un método de resolución para el caso general.

Teorema 2.5: Se supone $n \neq 0$ o bien 1. Entonces la transformación $\mathbf{V = y^{1-n}}$ reduce la ecuación de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (2.37)$$

a una ecuación lineal en V.

Demostración: Primero se multiplica la ecuación (2.37) por y^{-n}, con esto se puede expresar en la forma equivalente:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \quad (2.38)$$

Si se hace $V = y^{1-n}$, entonces $\frac{dV}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$

y la ecuación (2.38) se transforma en:

$$\frac{1}{1-n}\frac{dV}{dx} + P(x)V = Q(x)$$

o bien de manera equivalente

$$\frac{dV}{dx} + (1-n)P(x)V = (1-n)Q(x)$$

Al introducir las sustituciones $P_1(x) = (1-n)P(x)$ y $Q_1(x) = (1-n)Q(x)$, se puede escribir:

$$\frac{dV}{dx} + P_1(x)V = Q_1(x),$$

que es lineal en V.

Escaneado con CamScanner

Ejemplo: $\frac{dy}{dx} + y = x y^3$

Esta es una ecuación diferencial de Bernoulli, donde $n=3$. Primero se multiplica la ecuación por y^{-3}, de esta manera se expresa en la forma equivalente $y^{-3}\frac{dy}{dx} + y^{-2} = x$

Si se hace $v = y^{1-n} = y^{-2}$, después $\frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

la ecuación diferencial anterior se transforma en la ecuación lineal:

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + v = x$$

Al escribir esta ecuación lineal en la forma estandar: $\frac{dv}{dx} - 2v = -2x \quad (2.40)$

Se ve que un factor de integración para esta ecuación es: $e^{\int P(x)dx} = e^{-\int 2dx} = e^{-2x}$

Al multiplicar (2.40) por e^{-2x}, obtenemos:

$$e^{-2x}\frac{dv}{dx} - 2e^{-2x}v = -2xe^{-2x}$$

o bien, $\frac{d}{dx}(e^{-2x}v) = -2xe^{-2x}$.

Al integrar se encuentra:

$$e^{-2x}v = \frac{1}{2}e^{-2x}(2x+1) + C,$$

$$v = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x},$$

donde C es una constante arbitraria. Sin embargo $v = \frac{1}{y^2}$

En consecuencia, se obtienen las soluciones de (2.34) en la forma: $\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$

Nota. Si se considera la ecuación:

$$\frac{df(y)}{dy}\frac{dy}{dx} + P(x)F(y) = Q(x), \quad (2.41)$$

donde f es una función conocida de y, al hacer $v = f(y)$, se tiene:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{df(y)}{dy}\frac{dy}{dx}$$

y la ecuación (2.41) se transforma en:

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

Escaneado con CamScanner

que es lineal en V. Observaremos ahora que la ecuación diferencial de Bernoulli (2.37) es un caso especial de la ecuación (2.47). Al escribir (2.37) en la forma

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

y después multiplicar por $(1-n)$, tenemos:

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + P_1(x)y^{1-n} = Q_1(x),$$

donde $P_1(x) = (1-n)P(x)$ y $Q_1(x) = (1-n)Q(x)$. Esta última tiene la forma (2.47) donde $f(y) = y^{1-n}$; al hacer $V = y^{1-n}$, se obtiene.

$$\frac{dv}{dx} + P_1(x)V = Q_1(x),$$

que es lineal en V. Para otros casos especiales de (2.47) vea el ejercicio 34.

Ecuación diferencial de Ricati

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y + q(t)y^2 + r(t) = 0$$

Si se tiene una solución particular $y = \varphi(t)$ se puede encontrar su solución general tomando $\boxed{y = \varphi(t) + z}$ z función de t.

Entonces $\frac{dy}{dt} = \varphi'(t) + z'$

Sustituyendo en * se tiene $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\varphi'(t) + z' + P(t)[\varphi(t) + z] + q(x)[\varphi(t) + z]^2 + r(t) = 0$$

$$\varphi' + z' + P(t)\varphi(t) + P(t)z + q(t)\varphi(t)^2 + q(2\varphi z) + qz^2$$

$$\varphi'(t) + P(t)\varphi(t) + q\varphi^2(t) + r(t) + z' + P(t)z + 2q\varphi z + qz^2 = 0$$

ó tambien: $\frac{dz}{dt} + [P + 2q\varphi]z + qz^2 = 0$

En razón a que φ es solución de * obteniéndose una ecuación de Bernoulli

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = q(t)y^n$$

$$= y^{-n}\frac{dy}{dt} + P(t)y^{1-n} = q(t)$$

Escaneado con CamScanner

Éc. de Bernoulli:

1) $2x\frac{dy}{dx} = y(2xy^2(\ln x + 1)$

$\rightarrow 2xy' = 2xy^3 + y$ (÷ Por $2x$)

$\rightarrow y' = y^3 + \frac{y}{2x} \rightarrow y' - \frac{1}{2x}y = y^3$ * $n=3$

Sea $v = y^{-2} \rightarrow v' = -2y^{-3}\cdot y'$; mult * Por $-2y^{-3}$

$\rightarrow -2y^{-3}y' + \frac{1}{x}y^{-2} = 1$; reemplazamos.

$v' + \frac{1}{x}v = 1$; Éc. lineal.

$P(x) = \frac{1}{x}$

Factor integrante $\beta(x) = e^{\int P(x)dx}$

$\rightarrow \beta(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$

mult. por $\beta(x) = y$.

$\rightarrow x(v' + \frac{1}{x}v) = 1 \cdot x \rightarrow xv' + v = x$

$\rightarrow \frac{d}{dx}(xv) = x \rightarrow d(xv) = x\,dx$

$\rightarrow \int d(xv) = \int x\,dx \rightarrow xv = \frac{1}{2}x^2 + c$

$\rightarrow v = x^{-1}(\frac{1}{2}x^2 + c)$

Pero $v = y^{-2} \rightarrow v = \frac{1}{y^2}$

$y^2 = \frac{1}{v} \rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{v}}$

$y = \pm\sqrt{x^{-1}(\frac{1}{2}x^2 + c)}$ ⇙

Escaneado con CamScanner

DD MM AA

② $y' - y = -y^2(x^2+x+1)$; $n=2$

Sea $v = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow v = -y^{-2}y'$

mult. Por $-y^{-2}$

$\rightarrow -y^{-2}y' + y^{-1} = (x^2+x+1)$; reemp.

$v' + v = x^2+x+1$ ∈. Lineal

$P(x) = 1$

$\beta(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int 1\,dx} = e^x$

mult. Por e^x

$\rightarrow e^x v' + e^x v = (x^2+x+1)e^x$

$\frac{d}{dx}(e^x v) = (x^2+x+1)e^x$

$\int (e^x v) = \int (x^2+x+1)e^x\,dx$

$e^x \cdot v = \underbrace{\int (x^2+x+1)e^x\,dx}_{\text{Por Partes}}$

$u = x^2+x+1 \qquad dv = e^x dx$

$du = 2x+1 \qquad v = e^x$

$e^x v = uv - \int v\,du$

$e^x v = (x^2+x+1)e^x - \underbrace{\int (2x+1)e^x\,dx}_{\text{Por Partes}}$

$e^x v = (x^2+x+1)e^x - \int (2x+1)e^x\,dx$

$v = 2x+1 \qquad dv = e^x dx$

$du = 2\,dx \qquad v = e^x$

Escaneado con CamScanner

$\rightarrow e^x V = (x^2+x+1)e^x - ((2x+1)e^x - \int 2e^x\,dx)$

$e^x V = (x^2+x+1)e^x - (2x+1)e^x + 2e^x + C$

$(\div$ Por $e^x)$

$\rightarrow V = x^2 + x + 1 - 2x - 1 + 2 + \frac{C}{e^x}$

$V = x^2 - x + 2 + Ce^{-x}$

Pero $V = y^{-1} \rightarrow V = \frac{1}{y} \rightarrow y = \frac{1}{V}$

$y = \frac{1}{x^2 - x + 2 + Ce^{-x}}$ ✓

Ricatis

$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^2 + R(x)$

$y_1 = f(x)$

① $y = y_1 + z$

$\frac{dy}{dx} + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^n$

② $y = y_1 + \frac{1}{z} \Rightarrow y = y_1 + z^{-1}$

$\frac{dy}{dx} + P(x)\cdot y = Q(x)$

Ej: $\frac{dy}{dx} = 3y + y^2 - 4$

$y_1 = 1 \quad y(0) = \frac{9}{5}$

$y = y_1 + z^{-1}$

$y = 1 + z^{-1}$

$\frac{dy}{dx} = -z^{-2}\frac{dz}{dx}$

$-z^{-2}\frac{dz}{dx} = 3(1+z^{-1}) + (1+z^{-1}) - 4$

$-z^{-2}\frac{dz}{dx} = 3 + 3z^{-1} + 1 + 2z^{-1} + z^{-2} - 4$

$-z^{-2}\frac{dz}{dx} = 5z^{-1} + z^{-2}$

$\rightarrow \frac{dz}{dx} = -5z - 1$

$\frac{dz}{dx} + 5z = -1$

$P(x) = 5 \quad \wedge \quad Q(x) = -1$

$e^{\int P(x)dx} = e^{5x}$

$e^{-\int P(x)dx} = e^{-5x}$

$y = e^{-\int P(x)dx}\left[C_1 + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right]$

$y = e^{-5x}\left[C_1 + \int (-1)e^{5x}\,dx\right]$

$y = e^{-5x}\left[C_1 - \frac{e^{5x}}{5}\right] = C_1 e^{-5x} - \frac{1}{5}$

$x = 0 \; ; \; y = 9/5$

$\frac{9}{5} = C_1 e^{-5(0)} - \frac{1}{5}$

$\frac{9}{5} = C_1 e^0 - \frac{1}{5}$

$\frac{7}{5} = C_1 - \frac{1}{5}$

$C_1 = 2$

$y = 2e^{-5x} - \frac{1}{5}$

Escaneado con CamScanner

Ecuación diferencial de clariaut.

$y(x) = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ó $y(x) = xy' + f(y')$

Esta ecuación es llamada e.D. de clariaut

Si derivamos, tenemos que:

$y' = y' + xy'' + f'(y')y''$ $\quad (x\frac{dy}{dx}) = \frac{dy}{dx} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)'$

$\Rightarrow 0 = xy'' + f'(y')y''$ $\quad = \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2}$

$0 = [x + f'(y')]y''$ $\quad = y' + xy''$

$\Rightarrow x + f'(y') = 0$ ó $y'' = 0$ $\quad (f(y'))' = f'(y')(y')'$

Si $y'' = 0 \Rightarrow y' = c$ (constante) $\quad = f'(y')y''$

Así $y = xc + f(c)$ (solución general)

- Si $x + f'(y') = 0$, entonces tenemos una Solución Singular y. Es usual representar la Solución Singular en forma Paramétrica $(x(p), y(p))$ con $p = \frac{dy}{dx}$

Resolver: $xy''' + (y'')^2 = y'' \rightarrow y'' = xy''' + (y'')^2$

Solución, tenemos $p = y''$

$xp' + (p')^2 = p$

$p' + xp'' + 2(p')p'' = p'$

$xp'' + 2(p')p'' = 0$

$(x + 2p')p'' = 0$

$x + 2p' = 0$ ó $p'' = 0$ $\rightarrow 2p' = -x$

$\rightarrow p' = -\frac{1}{2}x$

- Si $p'' = 0 \Rightarrow p' = c$ (constante) $\Rightarrow y''' = c$

$y''' = c$ al derivar

$xc + c^2 = p = y''$

Integrar

$\Rightarrow xc + c^2 = y'' \rightarrow y = \iint y''\,dx\,dx = \iint (xc + c^2)\,dx\,dx$

$y = \int \left(\frac{c}{2}x^2 + xc^2 + A\right)dx$

$y = \frac{c}{6}x^3 + c\frac{x^2}{2} + Ax + B$

Escaneado con CamScanner

Si $x+2p'=0 \Rightarrow p'=-\frac{1}{2}x$

Como $p=y'' \Rightarrow p'=y''' \Rightarrow y'''=-\frac{1}{2}x$

$\Rightarrow y=\iiint y'''\,dx\,dx\,dx$

$$y=\iiint\left(-\frac{1}{2}x\right)dx\,dx\,dx=-\frac{1}{2}\iiint x\,dx\,dx\,dx$$

$$y=-\frac{1}{2}\iint\left(\frac{x^2}{2}+A\right)dx\,dx=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{x^3}{6}+Ax+B\right)dx$$

$$y=-\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{24}+\frac{A}{2}x^2+Bx+C\right]$$

Así $\boxed{y=-\frac{x^4}{48}-\frac{1}{4}x^2-\frac{B}{2}x-\frac{C}{2}}$

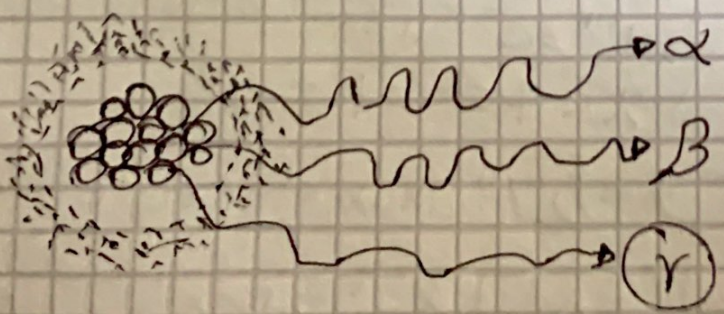
Es solución singular de la E.D.

Nuevo tema

Problemas que se modelan con E.D.O. de primer orden.

Nota: Los modelos matemáticos son, en general, no representan en su totalidad a la realidad, son una aproximación de esta.

Desintegración radioactiva



Escaneado con CamScanner

El modelo de desintegración radioactiva dice que para una cantidad de sustancia y, la variación en la cantidad de sustancia es proporcional a la cantidad de sustancia actual.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

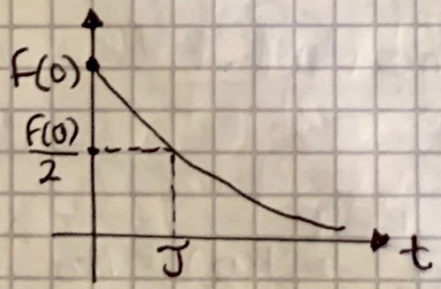
$|k|$ es constante de desintegración.

1) **Vida media de una sustancia radioactiva:**

$f(t)$ es la cantidad de sustancia radioactiva en el tiempo t, se define J como la vida media de la sustancia si J cumple:

$$\frac{F(J)}{f(0)} = \frac{1}{2}.$$

- Radio $Ra-226$, $J = 1700$ años
  transmuta en radon $Rn-222$
- Uranio $U-230$, $J = 4.500.000.000$ años
  transmuta en Plomo $Pb-206$
- Carbono radioactivo $C-14$ $J = 5600$ años.



Escaneado con CamScanner

DD MM AA

Ejemplo:

La vida media del isótopo 226 de radio es 1700 años. Encontrar que Porcentaje, de una Cantidad de radio se ha desintegrado en 100 años.

Solución: $T = 1700$

$y(100) = ?$

↓ Cantidad de radio en 100

Podemos modelar el Problema con la ecuación

$$y' = ky \quad \left(\frac{dy}{dt} = ky\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = k\,dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$$

$$\Rightarrow \ln|y| = kt + C$$

Como $y \geq 0$

$$\Rightarrow \ln y = kt + c$$

$$\Rightarrow e^{\ln y} = e^{kt+c}$$

$$y = e^{kt}\cdot e^{c} = A_0 e^{kt}, \quad A_0 = e^{c}$$

$$y(t) = y = A_0 e^{kt} \quad \text{Ec. general.}$$

Notemos que si $t = 0$

$$\Rightarrow y(0) = A_0 e^{k(0)} = A_0 \quad \rightarrow y(0) = A_0$$

$$\Rightarrow \boxed{y = y(0)\,e^{kt}}$$

Sabemos que:

$$\frac{y(\gamma)}{y(0)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{y(1700)}{y(0)} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{como} \quad y = y(0)e^{kt}$$

$$\Rightarrow \frac{y(0)e^{k(1700)}}{y(0)} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

Norma

Escaneado con CamScanner

$\Rightarrow e^{k(1700)} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \ln e^{k(1700)} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow k(1700) = \ln 1 - \ln 2$

$\Rightarrow \boxed{k = -\frac{\ln 2}{1700} \approx -0,00047}$

$\Rightarrow y(100) = y(0)\, e^{-0,00047(100)} = y(0)\, 0.9601$ → $1 - 0,9601 = 0,0399 \approx 3.9\%$

Se ha desintegrado el ≈3.9 % de la cantidad inicial.

Ejemplo: (Crecimiento Poblacional)(Decreciente)

Se encuentra que un hueso fosilizado contiene una milésima de la concentración de C·14 que encuentra la materia viva. Estime la edad del fósil ($\tau = 5600$ años).

Solución:

$\tau = 5600$ $\quad \boxed{y' = ky} \quad \left(\frac{dy}{dt} = ky\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\, dy = k\, dt$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y}\, dy = \int k\, dt$ $\qquad (y > 0)$

$\Rightarrow \ln|y| = kt + c$

$\ln y = kt + c$

$\Rightarrow y = e^{kt+c} = e^{kt}e^{c} = Ae^{kt}$, donde: $A = e^{c}$

$\boxed{y(t) = y = Ae^{kt}}$

Cantidad inicial $(t = 0) \Rightarrow y(0) = Ae^{k(0)} = A \Rightarrow y(0) = A$

$\boxed{y(t) = \frac{A}{1000}}$ $\quad \frac{y(\tau)}{y(0)} \Rightarrow \frac{y(5600)}{y(0)} = \frac{Ae^{k(5600)}}{A} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow e^{k(5600)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln e^{k(5600)} = \ln\frac{1}{2}$

$\Rightarrow k\,5600 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \Rightarrow \boxed{k = -\frac{\ln 2}{5600} \approx -0,00012378}$

Como $y(t) = \frac{1}{1000}A$

$\Rightarrow$ Así, $\frac{A}{1000} = Ae^{-0,00012378t} \Rightarrow \frac{1}{1000} = e^{-0,00012378t}$

$-0,00012378t = \ln\frac{1}{1000} = -\ln 1000$

$\Rightarrow t = \frac{\ln 1000}{0,00012378}$

$\Rightarrow \boxed{t \approx 55800 \text{ años}}$

milésima

Escaneado con CamScanner

Crecimiento del Numero de Bacterias

Se Puede modelar el cultivo de una cantidad de bacterias asumiendo que la Variación del número de bacterias en un tiempo t es Proporcional al número de bacterias en t.

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad (y \text{ es el número de bacterias}).$$

Ejemplo: En un Principio, un cultivo al inicio tiene P_0 Cantidad de bacterias. En 1 h Se determina que el número de bacterias es $\frac{3}{2}P_0$.

Si la rapidez de crecimiento es Proporcional al número de bacterias $P(t)$ presente en el tiempo, determine el tiempo necesario Para que Se triplique el número de bacterias.

Solución:

en $t=1 \Rightarrow P(1) = \frac{3}{2}P_0$

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

$$\frac{1}{P}dP = k\,dt \rightarrow \int \frac{1}{P}dP = \int k\,dt$$

$$\ln|P| = kt + C$$

$$\ln P = kt + C$$

$$\ln P = kt + C$$

$$e^{\ln P} = e^{kt+C}$$

$$P = e^{kt+C} \Rightarrow P = e^{kt}e^{C} = P_0 e^{kt}, \quad e^C = P_0$$

$$\Rightarrow \text{En } t=0 \Rightarrow \boxed{P(t) = P_0 e^{kt}}$$

$$\Rightarrow P(1) = \frac{3}{2}P_0 = P_0 e^{kt} \Rightarrow \frac{3}{2} = e^k \Rightarrow \ln e^k = \ln\frac{3}{2}$$

$$k = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\boxed{k = 0{,}4055}$$

$$P(t) = 3P_0 \Rightarrow P_0 e^{0.4055t} = 3P_0$$

$$\Rightarrow \ln e^{0.4055t} = \ln 3$$

$$\Rightarrow 0{,}4055t = \ln 3 \rightarrow t = \frac{\ln 3}{0{,}4055} \approx 2.71 \text{ horas}$$

$$t = 2.71 \text{ h}$$

Escaneado con CamScanner

Problemas de enfriamiento (o calentamiento)

(2) Ley de enfriamiento de Newton:

El cociente de variación de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia de su temperatura y la del medio ambiente.

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m), \quad \left(\frac{dT}{dt} = KT - KT_m\right)$$

(T_m: temperatura ambiente)

T: es la temperatura del cuerpo.

T_m: es la temperatura del medio ambiente.

Ejemplo: Cuando saca un pastel de un horno, se mide su temperatura en 300°f. Tres minutos después su temperatura es de 200°f ¿cuanto tarda el pastel en alcanzar una temperatura ambiente de 70°f?

Solución

$T(0) = 300°f$ $\quad \frac{dT}{dt} = K(T - T_m), \quad T_m = 70°f$

$T(3) = 200°f$

E.C. lineal de 1er orden

Problemas de valor inicial $\begin{cases} \frac{dT}{dt} = K(T - 70) \\ T(0) = 300 \end{cases}$

Tenemos: $\frac{dT}{dt} = K(T - 70)$

$$\Rightarrow \frac{1}{T-70}\,dT = K\,dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{T-70}\,dT = K\int dt$$

$$\Rightarrow \ln|T-70| = Kt + C$$

$y(t) = 70°f \Rightarrow e^{\ln|T-70|} = e^{Kt+C}$

$$T - 70 = e^{Kt+C} = e^C e^{Kt}$$

$$T = e^C e^{Kt} + 70$$

Escaneado con CamScanner

• Cuando $t = 0 \Rightarrow T(0) = 300$

$\Rightarrow 300 = e^{k(0)} e^c + 70$

$\Rightarrow e^c = 300 - 70 \Rightarrow \boxed{e^c = 230}$

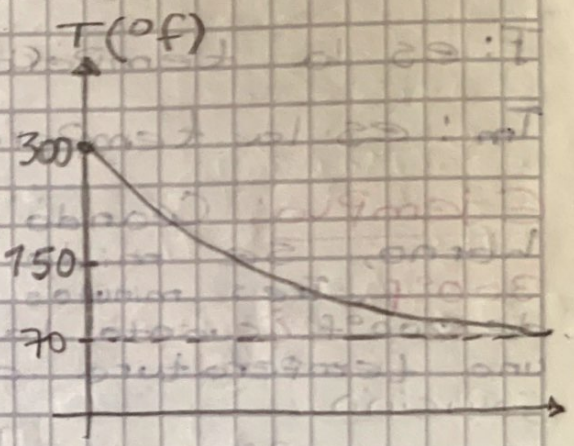
• Cuando $t = 3 \Rightarrow T(3) = 200$

$\Rightarrow 200 = 230 e^{3k} + 70.$

$\Rightarrow 200 - 70 = 230 e^{3k} \Rightarrow 130 = 230 e^{3k} \Rightarrow \frac{130}{230} = e^{3k}$

$\Rightarrow \ln \frac{13}{23} = \ln e^{3k} \Rightarrow \ln \frac{13}{23} = 3k \Rightarrow k = \frac{\ln(13/23)}{3}$

$\Rightarrow \boxed{T = 230 e^{-0,19018 t} + 70} \Rightarrow \boxed{k \approx -0,19018}$



Se considera un tiempo estimado igual a:

t (minuto)	T(t)
20.1	75°
21.3	74°
22.3	73°
24.9	72°
28.6	71°
32.3	70.5°

③

Mescla 5:

→ tasa de entrada de salmuera

→ tasa de salida de salmuera

Escaneado con CamScanner

① (*) $R_{entrada} = \begin{pmatrix} \text{Concentración de sal en el flujo de entrada} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Rapidez de entrada de la Salmuera} \end{pmatrix}$

$A(t)$ denota la cantidad de sal

③ $\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} \text{Tasa de entrada de sal} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Tasa de salida de sal} \end{pmatrix}$

$R_{entrada} - R_{salida}$

② (*) $R_{salida} = \begin{pmatrix} \text{concentración de sal en el flujo de Salida} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Rapidez de salida de la Salmuera} \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} \text{Concentración de sal en el flujo de Salida} \end{pmatrix} = \frac{\text{Cantidad de sal}}{\text{Total de Salmuera en el tanque.}}$

Ejemplo: Suponjase que un gran tanque de mesclado contiene 300 galones de Salmuera. Otra solución de Salmuera se bombea hacia el tanque a una rapidez de 3 galones por minutos; la concentración de sal en el flujo de entrada es de 2 libras por galón. Cuando la solución en el tanque está bien agitada, se bombea a la misma rápidez que la solución entrante. Si al inicio se disolvieron 50 libras de Sal en los 300 galones, ¿cuánta Sal se encuentra en el deposito después de un tiempo largo? Solución. Total de Salmuera en el tanque: 300 gal

- Concentración en el flujo de entrada = 2 lb/gal
- Rápidez de entrada de salmuera = 3 gal/min
- Concentración de sal en el flujo de salida = $\frac{A(t)}{300}$
- Rápidez de Salida de Salmuera = 3 gal/min

$\Rightarrow R_{entra} = (2\ lb/gal)(3\ gal/min) = 6\ lb/min$

$\Rightarrow R_{salida} = \left(\frac{A(t)}{300}\right)(3\ gal/min) = \frac{A(t)}{100}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A(t)}{100} \\ A(0) = 50 \end{cases}$$

Escaneado con CamScanner

Se multiplica por 100:

$$\Rightarrow 100\frac{dA}{dt} = (600 - A(t))$$

$$\Rightarrow \frac{100}{600 - A(t)}\,dA = dt$$

$$\Rightarrow 100\int \frac{dA}{600 - A(t)} = \int dt$$

$$\Rightarrow -100 \ln|600 - A(t)| = t + C_1$$

$$\Rightarrow \ln(600 - A(t)) = -\frac{t}{100} + C_2$$

$$600 - A(t) = e^{-t/100} e^{C_2}$$

$$\Rightarrow A(t) = 600 + e^{-t/100} e^{C_2}$$

$$A(0) = 50 = 600 + e^{-0/100} e^{C_2} = 600 + e^{C_2}$$

$$\Rightarrow e^{C_2} = 50 - 600$$

$$\Rightarrow e^{C_2} = -550$$

$$\Rightarrow \boxed{A(t) = 600 - 550e^{-t/100}}$$

Cuando $t \to \infty$, $A(t) \to 600$

¿Cuál sería la función que determina la cantidad de sal si la rápidez de salida de la salmuera no es 3 gal/min sino 2 gal/min?

otra forma Por factor integrante:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A(t)}{100} = 6$$

$$e^{\int \frac{1}{100}dt} = e^{t/100}$$

$$\frac{d}{dt}\left[Ae^{t/100}\right] = 6e^{t/100} \times 100$$

$$Ae^{t/100} = 600e^{t/100} + C$$

$$A = \frac{600e^{t/100}}{e^{t/100}} + \frac{C}{e^{t/100}}$$

$$\boxed{A = 600 + Ce^{-t/100}}$$

- Si $A(0) = 50$

$$\Rightarrow 50 = 600 + Ce^{-0/100}$$

$$\Rightarrow C = 50 - 600$$

$$\Rightarrow C = -550$$

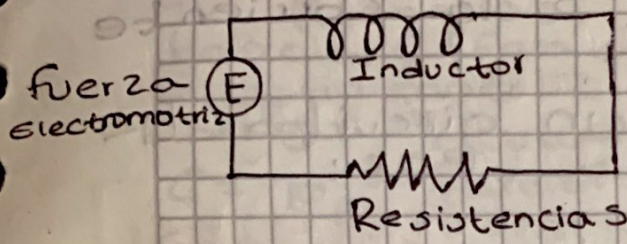
Por lo tanto la cantidad de sal que hay en el tanque es ~~$A(t) = 600 - 550e^{-t/100}$~~

Escaneado con CamScanner

DD MM AA 13 09 17

4) Circuitos en series

* Circuito LR en serie:



Ley de Kirchhoff: La suma de caída de voltaje en un inductor $\left(L\left(\frac{di}{dt}\right)\right)$ y la caída del voltaje en el resistor (iR) es la misma que el circuito $(E(t))$

$$L\left(\frac{di}{dt}\right) + iR = E(t)$$

* Circuito RC en serie:

La caída de voltaje en un capacitor con capacitancia C está dada por

$\frac{q(t)}{C}$ → carga
C → capacitancia.

$V = iR$

Con la ley de Kirchhoff tenemos:

$$Ri + \frac{q(t)}{C} = E(t)$$

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E(t)$$

($\frac{dq}{dt}$: variación de la carga en un intervalo de tiempo por unidad de tiempo)

Escaneado con CamScanner

→ circuito LR en serie.

Ejemplo: Una batería de 12 volts se conecta a un circuito en serie en el fue la inductancia es $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia en 10 homs. Determine la corriente i si la corriente inicial es cero. solución:

En este caso tenemos un circuito LR en serie y se modela por:

$$L\left(\frac{di}{dt}\right) + iR = E(t)$$

$L = \frac{1}{2}$
$R = 10$ → $\boxed{\frac{1}{2}\frac{di}{dt} + 10i = 12}$ $\boxed{i(0) = 0}$ Problema de valor inicial.
$E = 12$

mult. por 2 $\Rightarrow \frac{di}{dt} + 20i = 24$

Un factor integrante es:

$$u = e^{\int 20\,dt} = e^{20t}$$

$$\Rightarrow e^{20t}\frac{di}{dt} + 20e^{20t}i = 24e^{20t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{20t} \cdot i\right] = 24e^{20t}$$

↓ la derivada de este producto es igual a:

Integrando tenemos:

$$e^{20t}i = 24\int e^{20t}\,dt$$

$$= 24\left[\frac{e^{20t}}{20} + C_1\right]$$

$$\Rightarrow e^{20t}i = \frac{24}{20}e^{20t} + C_2$$

$$\Rightarrow i = \frac{24}{20}e^{20t}e^{-20t} + C_2e^{-20t}$$

$$\Rightarrow \boxed{i = \frac{24}{20} + C_2e^{-20t}}$$

Escaneado con CamScanner

Como $i(0)=0 \rightarrow 0=\frac{6}{5}+C_2 e^{-20(0)}=\frac{6}{5}+C_2$

$\rightarrow C_2=-\frac{6}{5} \rightarrow \boxed{i(t)=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}e^{-20t}}$

Ejemplo: Si un circuito contiene una resistencia R(ohmios) y un condensador de capacitancia C(faradios) en serie y una fuerza electromotriz E(voltios), determinar la carga q(culombios), si $R=10$ homios, $C=10^{-3}$ faradios y $E(t)=100 \operatorname{sen} 120\pi t$ voltios.

Solución:

En este caso tenemos un circuito RC en serie que se modela con:

$$\boxed{R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E(t)}$$

$R=10$

$C=10^{-3}$

$E(t)=100 \operatorname{Sen} 120\pi t$

$$10\frac{dq}{dt}+10^3 q=100 \operatorname{Sen} 120\pi t$$

dividimos por 10: $\rightarrow \frac{dq}{dt}+10^2 q=10 \operatorname{sen} 120\pi t$

Un factor integrante es $u=e^{\int 10^2 dt}=e^{10^2 t}$

mult. por factor int. $\rightarrow e^{10^2 t}\frac{dq}{dt}+10^2 e^{10^2 t} q=10 e^{2t} \operatorname{sen} 120\pi t$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{10^2 t} q\right]=10 e^{10^2 t} \operatorname{Sen} 120\pi t$$

Integramos:

$$e^{10^2 t} q=10\int e^{10^2 t} \operatorname{Sen} 120\pi t\, dt$$

Integral por partes: $\int u\,dv=vu-\int v\,du$

$\rightarrow$ Sea $u=\operatorname{Sen} 120\pi t \qquad dv=e^{10^2 t}dt$

$du=120\pi \cos 120\pi t\, dt, \quad v=\frac{e^{10^2 t}}{10^2}$

$$\rightarrow \int e^{10t} \operatorname{Sen} 120\pi t\, dt=\frac{e^{10^2 t}}{10^2}\operatorname{Sen} 120\pi t-\frac{120\pi}{10^2}\int e^{10^2 t}\cos 120\pi t\, dt+C_1$$

Escaneado con CamScanner

Sea $w = \cos 120\pi t$, $dz = e^{10^2 t}\,dt$

$\Rightarrow dw = -120\pi \operatorname{sen} 120\pi t\,dt$, $z = \dfrac{e^{10^2 t}}{10^2}$

$$\Rightarrow \int e^{10t}\cos 120\pi t\,dt = \frac{e^{10^2 t}}{10^2}\cos 120\pi t + \frac{120\pi}{10^2}\int e^{10^2 t}\operatorname{sen} 120\pi t\,dt + C_2$$

mult por 10^2:

$$\Rightarrow 10\int e^{10^2 t}\operatorname{sen} 120\pi t\,dt = 10\left[\frac{e^{10^2 t}}{10^2}\operatorname{sen} 120\pi t - \frac{120\pi}{10^2}\left(\frac{e^{10^2 t}}{10^2}\cos 120\pi t + \frac{120\pi}{10^2}\int e^{10^2 t}\operatorname{sen} 120\pi t\,dt + C_2\right) + C_1\right]$$

$$\Rightarrow 10\int e^{10^2 t}\operatorname{sen} 120\pi t\,dt = 10\left[\frac{e^{10^2 t}}{10^2}\operatorname{sen} 120\pi t - \frac{120\pi}{10^4}e^{10^2 t}\cos 120\pi t - \frac{(120\pi)^2}{10^4}\int e^{10^2 t}\operatorname{sen} 120\pi\,dt + C_3 + C_1\right]$$

$$\Rightarrow 10\int e^{10^2 t}\operatorname{sen} 120\pi t\,dt = \frac{10e^{10^2 t}}{10^2}\operatorname{sen} 120\pi t - \frac{120\pi}{10^3}e^{10^2 t}\cos 120\pi t - \frac{(120\pi)^2}{10^3}\int e^{10^2 t}\operatorname{sen} 120\pi t\,dt + C_4$$

se pasa al otro lado

$$\Rightarrow 10\int e^{10^2 t}\operatorname{sen} 120\pi t + \frac{(120\pi)^2}{10^3}\int e^{10^2 t}\operatorname{sen} 120\pi t\,dt = \frac{10e^{10^2 t}}{10^2}\operatorname{sen} 120\pi t - \frac{120\pi}{10^3}e^{10^2 t}\cos 120\pi t + C_4$$

$$\Rightarrow \left(10 + \frac{(120\pi)^2}{10^3}\right)\int e^{10^2 t}\operatorname{sen} 120\pi t\,dt = \frac{10}{10^2}e^{10^2 t}\operatorname{sen} 120\pi t - \frac{120\pi}{10^3}e^{10^2 t}\cos 120\pi t + C_4$$

mult por 10^3 $\Rightarrow (10^4 + (120\pi)^2)\int e^{10^2 t}\operatorname{sen} 120\pi t\,dt = 10^2 e^{10^2 t}\operatorname{sen} 120\pi t - 120\pi e^{10^2 t}\cos 120\pi t + C_5$

$$\Rightarrow \int e^{10^2 t}\operatorname{sen} 120\pi t\,dt = \frac{e^{10^2 t}\left(10^2\operatorname{sen} 120\pi t - 120\pi\cos 120\pi t\right)}{10^4 + (120\pi)^2} + C_6$$

$$\Rightarrow 7e^{10^2 t} = 10\left[e^{10^2 t}\frac{\left(10^2\operatorname{sen} 120\pi t - 120\pi\cos 120\pi t\right)}{10^4 + (120\pi)^2} + C_6\right]$$

mult. por $e^{10^2 t}$

$$\Rightarrow q(t) = 10\left[\frac{10^2\operatorname{sen} 120\pi t - 120\pi\cos 120\pi t}{10^4 + (120\pi)^2} + C_6 e^{-10^2 t}\right]$$

Tarea: hacer el mismo ejercicio pero con $E(t) = 100\cos 120\pi t$

Escaneado con CamScanner

Nuevo tema.

Ecuaciones Diferenciales lineales de Orden Superior

03/Oct/17

Recordemos que una E.D.O lineal es de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{(n-1)} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_0(x)y = g(x)$$

y si esta sujeta a:

$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$,

Entonces tenemos un P. V. I.

Teorema: Existencia y Unicidad de solución de una E.D.O de orden n.

Sean: $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Si $x = x_0$ es cualquier Punto en el intervalo I, entonces una solución $y(x)$ del P.V.I (ecuación) Existe y es única en I.

Ejemplo: Determinar si $y(x) = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$, es solución del P.V.I.

$$\begin{cases} y'' - 4y = 12x \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Solución: $y'(x) = 6e^{2x} - 2e^{-2x} - 3$

$y''(x) = 12e^{2x} + 4e^{2x}$

Ahora: $12e^{2x} + 4e^{-2x} - 4(3e^{2x} + e^{-2x} - 3x)$

$= 12e^{2x} + 4e^{-2x} - 12e^{2x} - 4e^{-2x} + 12x$

$= 12x$

Luego $y(x) = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ es solución de $y'' - 4y = 12x$, Podemos ver que $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$

Escaneado con CamScanner

porque es mayor.

$a_n(x)=0$

Aquí $a_2(x)=1$, $a_1(x)=0$, $a_0(x)=-4$, $g(x)=12x$, estas funciones son continuas en todo $\mathbb{R}$, en particular son continuas en cualquier intervalo que contiene a $x_0=0$ $a_2(x)\neq 0$, para todo x en $\mathbb{R}$. Por el teorema anterior $y(x)=3e^{2x}+e^{-2x}-3x$ es solución única del P.V.I.

Ecuación diferencial homogenea.

Recordemos que una E.D. de la forma

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \quad (2)$$

es llamada homogénea y

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=g(x) \quad (3)$$

es llamada no homogenea.

La E.D (2) es llamada homogenea asociada de la E.D (3).

Teorema: (Principio de SuperPosición, Ecuaciones homogéneas)

Sean $y_1, y_2, y_3, \dots y_k$ soluciones de (2) en un intervalo I. Entonces la combinación lineal

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ky_k$$

también es una solución de (2) en I. donde c_i, $i=1,\dots k$ son constantes arbitrarias.

Ejemplo: Consideremos las funciones $y_1=x^2$ y $y_2=x^2\ln x$. Consideremos la E.D. $x^3y'''-2xy'+4y=0$. Como $y_1'=2x$, $y_1''=2$, además:

$$y_2'=(x^2\ln x)'=2x\ln x+x^2\frac{1}{x}=2x\ln x+x$$

$$y_2''=(x^2\ln x)''=(2x\ln x+x)'=2\ln x+2x\frac{1}{x}+1=2\ln x+2+1=2\ln x+3$$

$y_1'''=0$,

$x^3(0)-2x(2x)+4(x^2)=0$,

entonces y_1 es solución de la E.D.

Escaneado con CamScanner

$y_2''' = (x^2 \ln x)''' = 2\frac{1}{x} + 0 = \frac{2}{x}$

$\Rightarrow x^3 y_2''' - 2x y_2' + 4 y_2 =$

$x^3 (x^2 \ln x)''' - 2x(x^2 \ln x)' + 4(x^2 \ln x)$

$x^3\left(\frac{2}{x}\right) - 2x(2x \ln x + x) + 4x^2 \ln x$

$= 2x^2 - 4x^2 \ln x - 2x^2 + 4x^2 \ln x$

$= 0$

Entonces y_2 es solución de la E.D. Por el Principio de superposición, tenemos que:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

Es solución de la E.D, en $(0, \infty)$.

Corolario del teorema anterior:

i) un múltiplo constante $y = c_1 y_1(x)$ de una solución $y_1(x)$ de una E.D.L homogéneas es también una solución.

ii) una E.D.L homogénea posee siempre la solución $y = 0$.

Comprobar que es solución (no es necesario hacerlo en el Parcial).

$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$

$y' = c_1 2x + c_2(2x \ln x + x)$

$y'' = 2c_1 + c_2(2 \ln x + 3)$

$y''' = 2\frac{c_2}{x}$

$\Rightarrow x^3\left(\frac{2c_3}{x}\right) - 2x[2xc_1 + c_2(2x \ln x + x)] + 4(c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x)$

$= 2c_3 x^2 - 4x^2 c_1 - 4x^2 c_2 \ln x - 2x^2 c_2 + 4c_1 x^2 + 4c_2 x^2 \ln x$

$= 0$

Escaneado con CamScanner

Es linealmente dependiente cuando el determinante o wroskiano da cero, y el linealmente independiente cuando da distinto de cero,

Definición: Dependencia lineal e independencia

Un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ es linealmente dependiente (L.D) en un intervalo I, si existen constantes c_i, $i = 1, \dots, n$ no todas ceros, tales que: $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$

Para toda x en el intervalo. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es linealmente independiente (L.I).

Recordemos:
$\vec{u} = (1,3)$
$\vec{v} = (3,9) = 3(1,3)$
$c_1\vec{u} + c_2\vec{v} = \vec{0}$
$(c_1, 3c_1)$
$(3c_2, 9c_2)$
$c_1 + 3c_2 = 0$
$3c_1 + 9c_2 = 0$
De (1):
$c_1 = -3c_2$
$-\frac{c_1}{3} = c_2$
sea $c_1 = 1$
$c_2 = -\frac{1}{3}$
$\Rightarrow c_1\vec{u} + c_2\vec{v} = \vec{0}$
$2(1,3) + (-\frac{1}{3})(3,9) = 0$
son dependientes

Ejemplo:

Consideremos $f_1(x) = \cos^2 x$, $f_2(x) = \operatorname{sen}^2 x$, $f_3(x) = \sec^2 x$, $f_4(x) = \tan^2 x$. Queremos determinar si el conjunto de soluciones es L.I o L.D.

$\Rightarrow c_1 \cos^2 x + c_2 \operatorname{sen}^2 x + c_3 \sec^2 x + c_4 \tan^2 x = 0$

Note que: si $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 1$, tenemos:

Por tanto se da valor a las constantes

$1 - \sec^2 x + \tan^2 x = \tan^2 x + 1 - \sec^2 x$

luego el conjunto de funsiones es linealmente dependiente.

Ejemplo: Consideremos $f_1(x) = x$, $f_2(x) = |x|$

$c_1 x + c_2 |x| = 0$ en $(-\infty, \infty)$

$c_1 x + c_2 |x| = 0$

Las funciones en $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = |x|$ son L.I en $(-\infty, \infty)$.

Pero en $(0, \infty)$ tenemos $f_2(x) = |x| = x$

Vemos que f_1 y f_2 son L.D en $(0, \infty)$ es importante tener en cuenta el intervalo de definición de las funsiones para saber si son L.I o L.D.

Escaneado con CamScanner

Definición: Wronskiano

Suponga que cada una de las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., $f_n(x)$ posee al menos $n-1$ derivadas. El determinante:

$$W(f_1, f_2, \ldots f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$\rightarrow$ 1ra derivada

$\rightarrow$ $(n-1)$ derivada.

Se llama wronskiano de las funciones.

Teorema: Criterio para soluciones L.I.

Sean $y_1, y_2, \ldots y_n$, n soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n (2), en el intervalo I. El conjunto de soluciones es linealmente independiente en I. si y sólo si $W(y_1, y_2, \ldots y_n) \neq 0$ para todo x en I $(\forall x \in I)$.

Definición (conjunto fundamental de soluciones)

Cualquier conjunto $y_1, y_2, \ldots y_n$ de n soluciones linealmente independiente de la E.D.L homogénea de orden n (2) en un intervalo I es llamado un conjunto fundamental de soluciones en I.

$\vec{u} = k\vec{v}$

$c_1 u + c_2$

Nota: Existe un conjunto fundamental de soluciones para la E.D.L homogénea de orden n (2).

Teorema: Solución general, Ecuaciones homogéneas.

Sea $y_1, y_2, \ldots y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la E.D.L homogénea de orden n (2) en el intervalo I. Entonces la solución general de la ecuación en I es:

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$ donde c_i, $i = 1, \ldots n$ son ctes arbitrarias.

Escaneado con CamScanner

Ejemplo: Consideremos la ecuación.

$y'' - 9y = 0$ Sea $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-3x}$

Solución:

$y_1' = 3e^{3x}$

$y_1'' = 9e^{3x}$

$\Rightarrow 9e^{3x} - 9e^{3x} = 0$

Luego y_1 es solución de la E.D.

$y_2' = -3e^{-3x}$

$y_2'' = 9e^{-3x}$

$\Rightarrow 9e^{-3x} - 9e^{-3x} = 0$

Luego y_2 es Solución de la E.D.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & e^{-3x} \\ 3 & -3e^{-3x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{x} \cdot e^{-3x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6 \neq 0$$

Así y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de Soluciones y por teorema anterior

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

es solución de la E.D.

Comprobar que es Solución: (no es necesario)

$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$

$y' = 3c_1 e^{3x} - 3c_2 e^{-3x}$

$y'' = 9c_1 e^{3x} + 9c_2 e^{-3x}$

$\Rightarrow 9c_1 e^{3x} + 9c_2 e^{-3x}$

$9c_1 e^{3x} + 9c_2 e^{-3x} - 9(c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x})$

$9c_1 e^{3x} + 9c_2 e^{-3x} - 9c_1 e^{3x} - 9c_2 e^{-3x} = 0$

Escaneado con CamScanner

Note que: $y_3 = 4\,\text{Senh}(3x) - 5e^{3x}$, es una Solución de la E.D.

$$y_3 = 4\left(\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}\right) - 5e^{3x}$$

$$y_3 = \frac{4}{2}e^{3x} - e^{-3x} - 5e^{3x}$$

$$y_3 = 2(e^{3x} - e^{-3x}) - 5e^{3x}$$

- $y_3' = 2(3e^{3x} + 3e^{-3x}) - 15e^{3x}$
- $y_3'' = 2(9e^{3x} - 9e^{-3x}) - 45e^{3x}$

Así $2(9e^{3x} - 9e^{-3x}) - 45e^{3x} - 9[2(e^{3x} - e^{-3x}) - 5e^{3x}]$

$= 0.$

Es decir y_3 es Solución de la E.D.

Si tomamos $C_1 = 2$, $C_2 = -7 \Rightarrow$

$$y = 2e^{3x} - 7e^{-3x} = 2e^{3x} - 2e^{-3x} - 5e^{3x}$$

$$= 2(e^{3x} - e^{-3x}) - 5e^{3x}$$

$$= 4\left(\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}\right) - 5e^{3x}$$

$$= y_3.$$

Para encontrar las C:

$2e^{3x} - 2e^{-3x} - 5e^{3x}$ (-1)

$= -3e^{3x} - 2e^{-3x}$ (3)

Ejemplo:

Las funciones $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$ Satisfacen la E.D. de tercer orden:

$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

Solución:

- $y_1' = e^x$, $y_1'' = e^x$, $y_1''' = e^x \rightarrow$

Escaneado con CamScanner

Así, Por el teorema anterior la Solución de la E.D.L no homogénea es:

$$y = y_c + y_p$$

y_c: Solución homogénea + y_p: Solución Particular de la no homogénea.

$$\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} - \frac{11}{12} - \frac{1}{2}x$$

Nota: Por lo general y_c es llamada función complementaria, es decir la Solución general de una E.D.L no homogenea tiene la forma $y = y_c + y_p$ donde y_c es la Solución General de la E.D.L homogénea asociada y y_p es una Solución Particular de la E.D.L no homogenea.

Teorema: (Principio de SuperPosición Para las no homogeneas)

Sean y_{p_1}, y_{p_2}, y_{pk}, K soluciones Particulares de la E.D.L no homogenea (3) de orden 3 en un intervalo I que corresponde a su vez, a K funciones distintas $g_1, g_2, \ldots g_k$, es decir, Se Supone que y_{p_i} denota una Solución Particular de la ecuación diferencial correspondiente.

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_i(x)$$

donde $i = 1, 2, \ldots K$. Entonces:

$$y_p = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \ldots + y_{p_k}(x)$$

es una Solución Particular de:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_k(x)$$

Estudiar el ejemplo

Escaneado con CamScanner

W: conjunto fundamental de soluciones

Ecuaciones no Homogéneas

DD MM AA

Teorema: Sea y_p cualquier solución particular de la E.D.L no homogénea (3) de orden n en un intervalo I, y sea $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la E.D homogenea asociada (2) en I. Entonces la solución general de la ecuación no homogenea en I. está dada por: $y = c_1 y_1^{(x)} + c_2 y_2^{(x)} + \ldots + c_n y_n^{(x)} + y_p$,

donde las c_i, $i = 1, \ldots, n$ son constantes arbitrarias.

Ejemplo: Consideremos la E.D.

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x$$

$y_p = -\frac{11}{12} - \frac{1}{2}x$ es una solución particula de la E.D.L no homogenea, en efecto.

$y_p' = -\frac{1}{2}$

$y_p'' = 0$

$y_p''' = 0$

$$0 - 6(0) + 11\left(-\frac{1}{2}\right) - 6\left(-\frac{11}{12} - \frac{1}{2}x\right)$$

$$-\frac{11}{2} + \frac{66}{12} + 3x = 3x$$

La solución general de la ecuación homogenea asociada es:

$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ en $(-\infty, \infty)$ (verificar)

Escaneado con CamScanner

Reducción de orden

Consideremos la E.D.

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (1)$$

Si y_1 es una Solución no trivial de (1) en un intervalo I, queremos encontrar una Solución y_2 de la E.D (1), definido en I, de tal forma que y_1, y_2 sean L.I.

Si suponemos y_1, y_2 son L.I, entonces

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = u(x) \text{ no es constante.}$$

Podemos determinar $u(x)$ al sustituir $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ en la E.D. (1) ($y_1(x) \neq 0, \forall x \in I$). Derivando tenemos que:

Derivamos y_2.

$$y_2' = uy_1' + y_1u'$$

$$y_2'' = uy_1'' + y_1'u' + y_1u' + u'y_1' = uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1$$

- Al dividir por $a_2(x)$ en (1) tenemos que:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (*)$$

donde $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ y $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$ ($P(x)$ y $Q(x)$ constantes en I)

Al reemplazar y_2' y y_2'' en (*)

$$y'' + Py' + Qy = (uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1) + P(uy_1' + y_1u') + Q(uy_1)$$

$$= u(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + (2y_1' + Py_1)u' + u''y_1$$

~~$= (u'' + Qu)y_1$~~

Como y_1 es Solución (*), $y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0$

$$\Rightarrow (2y_1' + Py_1)u' + u''y_1 = 0$$

Escaneado con CamScanner

Sea $w = u'$

$\Rightarrow (2y_1' + Py_1)w + w'y_1 = 0$

$\Rightarrow (2y_1' + Py_1)w + \frac{dw}{dx}y_1 = 0 \quad \div w$

$\Rightarrow (2y_1' + Py_1) + \frac{1}{w}\frac{dw}{dx}y_1 = 0$

$\Rightarrow (2y_1' + Py_1)dx + \frac{dw}{w}y_1 = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{2y_1'}{y_1} + P\right)dx + \frac{dw}{w} = 0$

Integrando:

$$\int \left(2\frac{y_1'}{y_1} + P\right)dx + \int \frac{dw}{w} = 0$$

$$\Rightarrow 2\int \frac{y_1'}{y_1}dx + \int P dx + \int \frac{dw}{w} = 0$$

$$\Rightarrow 2\ln|y_1| + \int P dx + \ln|w| = C$$

$$\Rightarrow \ln(y_1)^2 + \ln|w| + \int P dx = C$$

$$\Rightarrow \ln|wy_1^2| = -\int P dx + C$$

$$\Rightarrow e^{\ln|wy_1^2|} = e^{-\int P dx + C} = C_1 e^{-\int P dx}$$

$$\Rightarrow wy_1^2 = C_1 e^{-\int P dx}$$

$$\Rightarrow w = C_1 \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2}$$

Como $w = u' \Rightarrow u' = C_1 \dfrac{e^{-\int P dx}}{y_1^2}$

Integrando:

$$u = C_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2}dx + C_2$$

Pero $u = \dfrac{y_2}{y_1}$ y tomemos $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$

Escaneado con CamScanner

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} dx$$

Solución del Quiz (wronskiano y C.f.s)

$$x^3 y''' + 6x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0$$

$y_1 = x \qquad y_2 = x^{-2} \qquad y_3 = x^{-2} \ln x$

- $y_1 = x$
  $y_1' = 1$
  $y_1'' = 0$
  $y_1''' = 0$

- $y_2 = x^{-2}$
  $y_2' = -2x^{-3}$
  $y_2'' = 6x^{-4}$
  $y_2''' = -24x^{-5}$

- $y_3 = x^{-2} \ln x$
  $y_3' = -2x^{-3} \ln x + \frac{1}{x} x^{-2} = -2x^{-3} \ln x + x^{-3}$
  $y_3'' = 6x^{-4} \ln x - 2x^{-3} \cdot \frac{1}{x} - 3x^{-4}$
  $y_3'' = 6x^{-4} \ln x - 2x^{-4} - 3x^{-4}$
  $y_3'' = 6x^{-4} \ln x - 5x^{-4}$

$$y_3''' = -24x^{-5} \ln x + 6x^{-4} \cdot \frac{1}{x} + 20x^{-5}$$
$$= -24x^{-5} \ln x + 26x^{-5}$$

Se verifica que y_1, y_2 y y_3 sean solución de la E.D:

→ Para y_1:

$x^3(0) + 6x^2(0) + 4x(1) - 4(x) = 0$

Luego y_1 es solución de la E.D.

→ Para y_2:

$x^3(-24x^{-5}) + 6x^2(6x^{-4}) + 4x(-2x^{-3}) - 4(x^{-2}) = 0$

$-24x^{-2} + 36x^{-2} - 8x^{-2} - 4x^{-2} = 36x^{-2} - 36x^{-2} = 0$

Luego y_2 es solución de la E.D.

Escaneado con CamScanner

→ Para y_3:

$x^3(-24x^{-5}\ln x + 26x^{-5}) + 6x^2(6x^{-4}\ln x - 5x^{-4})$

$+ 4x(-2x^{-3}\ln x + x^{-3}) - 4(x^{-2}\ln x) = 0$

$\rightarrow -24x^{-2}\ln x + 26x^{-2} + 36x^{-2}\ln x - 30x^{-2}$

$-8x^{-2}\ln x + 4x^{-2} - 4x^{-2}\ln x = 0$

$\Rightarrow -36x^{-2}\ln x + 36x^{-2}\ln x + 30x^{-2} - 30x^{-2} = 0$

Luego y_3 es Soución de la E.D.

Se calcula el wronskiano:

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} x & x^{-2} & x^{-2}\ln x \\ 1 & -2x^{-3} & -2x^{-3}\ln x + x^{-3} \\ 0 & 6x^{-4} & 6x^{-4}\ln x - 5x^{-4} \end{vmatrix}$$

$$W(y_1, y_2, y_3) = x\begin{vmatrix} -2x^{-3} & -2x^{-3}\ln x + x^{-3} \\ 6x^{-4} & 6x^{-4}\ln x - 5x^{-4} \end{vmatrix} - x^{-2}\begin{vmatrix} 1 & -2x^{-3}\ln x + x^{-3} \\ 0 & 6x^{-4}\ln x - 5x^{-4} \end{vmatrix} + x^{-2}\ln x \begin{vmatrix} 1 & -2x^{-3} \\ 0 & 6x^{-4} \end{vmatrix}$$

$$W(y_1, y_2, y_3) = x\left[(-12x^{-7}\ln x + 10x^{-7}) - (-12x^{-7}\ln x + 6x^{-7})\right] - x^{-2}\left[(6x^{-4}\ln x - 5x^{-4}) - 0\right] + x^{-2}\ln x\left[6x^{-4} - 0\right]$$

$$W(y_1, y_2, y_3) = x(4x^{-7}) - x^{-2}(6x^{-4}\ln x - 5x^{-4}) + 6x^{-6}\ln x$$

$$= 4x^{-6} - 6x^{-6}\ln x + 5x^{-6} + 6x^{-6}\ln x$$

$$= 9x^{-6} \neq 0 \quad \text{para } x \text{ en } (0, \infty).$$

$$y = c_1 x + c_2 x^{-2} + c_3 x^{-2}\ln x$$

Escaneado con CamScanner

Parcial 25 de octubre

Ejercicio Reducción de orden:

$a_2 y'' \quad a_1 y' \quad a_0 y$

$x^2 y'' - 3x y' + 4y = 0$

- $y_1 = x^2$

$y_2(x) = u(x) y_1(x)$
$= u(x) x^2$

- $y_2 = u(x) x^2$

$y_2' = u \cdot 2x + u' x^2$

$y_2'' = u \cdot 2 + u' 2x + u'' x^2 + u' 2x$

Dividimos entre $a_2(x)$:

$\Rightarrow \frac{x^2 y''}{x^2} - \frac{3x y'}{x^2} + \frac{4y}{x^2} = 0$

P Q

$\Rightarrow y'' - \frac{3y'}{x} + \frac{4y}{x^2} = 0$ ✓

Se reemplazan las derivadas en ✓

- $2u + 2xu' + u'' x^2 + 2xu' - 3\left(\frac{2xu + u'x^2}{x}\right) + \frac{4(ux^2)}{x^2} = 0$

$\Rightarrow 2u + 2(2xu') + u'' x^2 - 3\frac{(2xu + u'x^2)}{x} + \frac{4(u x^2)}{x^2} = 0$

$\Rightarrow y'' + Py' + Qy = u(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + y_1(u'')$
$+ (2y_1' + Py_1) u' = 0$

$= u\left(2 - \frac{3}{x} 2x + \frac{4}{x^2} x^2\right) + x^2 (u'') + \left(2 \cdot (2x) - \frac{3x^2}{x}\right) u'$
$= 0$

Se hace 0 Porque y_1 sobre es solución.

$= x^2 (u'') + (4x - 3x) u' = 0$

Sea $w = u'$

$= x^2 w' + xw = 0$

$\Rightarrow x^2 \frac{dw}{dx} + xw = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{w} \frac{dw}{dx} + \frac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{w} dw + \frac{1}{x} dx = 0$

$\Rightarrow \int \frac{dw}{w} + \int \frac{dx}{x} = 0$

$\Rightarrow \ln|w| + \ln|x| = C$

$\ln|wx| = C$

$\Rightarrow wx = e^C = C_1$

$\Rightarrow w = C_1 \frac{1}{x}$

$\Rightarrow u' = C_1 \frac{1}{x}$

$\Rightarrow u = C_1 \int \frac{dx}{x}$

$= C_1 \ln x + C_2$

Tomamos $C_2 = 0$ y $C_1 = 1$

$\Rightarrow u = \ln x \Rightarrow y_2 = x^2 \ln x$

Por tanto la solución general es:

$y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$

Escaneado con CamScanner

Ecuaciones diferenciales Lineales Homogeneas Con coeficientes Constantes

Consideremos la E.D.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

donde a, b y c son constantes.

La ecuación $am^2 + bm + c = 0$ es llamada ecuación auxiliar (ecuación característica) asociada a la E.D.

Sea $d = b^2 - 4ac$ (discriminante de la ecuación auxiliar).

Si m_1 y m_2 son raíces de la ecuación auxiliar, tenemos tres casos:

Caso 1: $d > 0$ (m_1 y m_2 son raíces distintas).

La Solución general de la E.D.

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

Caso 2:

$d = 0$ (m_1 y m_2 son raíces reales iguales)

La Solución general de la E.D.

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_2 x}$$

Caso 3:

$d < 0$ (m_1 y m_2 son raíces complejas conjugadas, $m_1 = \alpha + \beta i$, $m_2 = \alpha - \beta i$)

La Solución general de la E.D. es:

$$y = c_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + c_2 e^{(\alpha - \beta i)x}$$

Nota: Recuerde que:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

Escaneado con CamScanner

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Teniendo en cuenta esta formula Podemos escribir la Sowción (cuando d<0) en la formula

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$$

Ejemplo: Resolver las siguientes E.D.

a) $2y'' - 5y' - 3y = 0$
b) $y'' - 70y' + 25y = 0$
c) $y'' + 4y' + 7y = 0$

Sowción

a) La ecuación caracteristicas $2m^2 - 5m - 3 = 0$

$$\Rightarrow m = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$m = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$m_1 = 3 \;,\; m_2 = -\frac{1}{2}$$

Luego, la Sowción de la E.D. es:

$$\boxed{y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-\frac{x}{2}}}$$

b) la ecuación Característica: $m^2 - 70m + 25 = 0$

$$m = \frac{-(-70) \pm \sqrt{(-70)^2 - 4(1)(25)}}{2} = \frac{70}{2} \;;\; m_1 = m_2 = 5$$

$$\boxed{y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}}$$

c) la ecuación característica es: $m^2 + 4m + 7 = 0$

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(7)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$m_1 = \frac{-4}{2} \pm \frac{\sqrt{-12}}{2} = -2 \pm \frac{\sqrt{(-1)12}}{2}$$

$$= -2 \pm \frac{\sqrt{-1}\sqrt{12}}{2} = -2 \pm i\frac{\sqrt{12}}{2} = -2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{2} i = -2 \pm i\sqrt{3}$$

Escaneado con CamScanner

$m_1 = -2 + i\sqrt{3}$

$m_2 = -2 - i\sqrt{3}$

$\alpha = -2, \quad \beta = \sqrt{3}$

$y = C_1 e^{-2x} \cos\sqrt{3}x + C_2 e^{-2x} \operatorname{sen}\sqrt{3}x$

Ejemplo: Resolver:

$$\begin{cases} 4y'' + 4y' + 17y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

La ecuación característica:

$4m^2 + 4m + 17 = 0$

$$m = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(4)(17)}}{2(4)}$$

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 272}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{-256}}{8}$$

$$m = \frac{-4}{8} + \frac{\sqrt{-256}}{8} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{(-1)(256)}}{8}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-1}\sqrt{256}}{8} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{256}}{8} = -\frac{1}{2} + \frac{16i}{8}$$

$$= -\frac{1}{2} + 2i$$

$m_1 = -\frac{1}{2} + 2i$

$m_2 = -\frac{1}{2} - 2i$

$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = 2$

$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos 2x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \operatorname{sen} 2x$

$C_1 \cos 0 + C_2 \operatorname{sen}(0) = -1$

$\Rightarrow \boxed{C_1 = -1}$

Escaneado con CamScanner

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x)$$

$$y' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x) + e^{-\frac{1}{2}x}(-2C_1 \operatorname{sen} 2x + 2C_2 \cos 2x)$$

$$y'(0) = -\frac{1}{2}(C_1 + 0) + (0 + 2C_2) = 2$$

$\cdot C_1 = -1$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}C_1 + 2C_2 = 2$$

$$\frac{1}{2} + 2C_2 = 2$$

$$2C_2 = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{C_2 = \frac{3}{4}}$$

Variación del Parámetro

Consideremos la E.D no homogenea: $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$

la podemos escribir así: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ (*)

Queremos Encontrar una Solución Particular de (*) de la forma: $y_p = u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x)$

donde y_1 y y_2 Son un Conjunto fundamental de Soluciones de la E.D homogénea asociada a (*) en un intervalo I.

Derivando $y_p' = u_1 y_1' + y_1 u_1' + u_2 y_2' + y_2 u_2'$

$$y_p'' = u_1 y_1'' + y_1' u_1' + y_1 u_1'' + u_1' y_1' + u_2 y_2'' + y_2' u_2' + y_2 u_2'' + u_2' y_2'$$

$$\Rightarrow y'' + Py' + Qy = u_1 y_1'' + y_1' u_1' + y_1 u_1' + u_1' y_1' + u_2 y_2'' + y_2' u_2' + y_2 u_2' + u_2' y_2' + P(u_1 y_1' + y_1 u_1' + u_2 y_2' + y_2 u_2') + Q(u_1 y_1 + u_2 y_2)$$

Escaneado con CamScanner

$\frac{d}{dx}(fg) = f'g + gf'$

$(c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g'$

Factorizamos:

$= u_1(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + u_2(y_2'' + Py_2' + Qy_2) + \frac{d}{dx}(y_1 u_1') +$

$\frac{d}{dx}(y_2 u_2') + y_1' u_1' + y_2' u_2' + P(y_1 u_1' + y_2 u_2') = f(x)$

Como y_1 y y_2 son soluciones de la E.D. homogenea asociada, entonces:

$y_1'' + Py_1' + Qy = 0$ y $y_2'' + Py_2' + Qy = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(y_1 u_1' + y_2 u_2') + y_1' u_1' + y_2' u_2' + P(y_1 u_1' + y_2 u_2') = f(x)$

Si suponemos que $y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0$, entonces

$y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x)$

Así, tenemos el sistema:

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema para u_1' y u_2' con la regla de Cramer:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \quad ; \quad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

Se resuelve

Note que $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ y podemos escribir:

$$u_1' = -\frac{y_2 f(x)}{W} \quad ; \quad u_2' = \frac{y_1 f(x)}{W}$$

Integrando:

$$u_1 = -\int \frac{y_2 f(x)}{W}\, dx \quad ; \quad u_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{W}\, dx$$

Escaneado con CamScanner

Ejemplo: Resolver:

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$$

Solución:

La E.D. homogénea asociada es:

$y'' - 4y' + 4y = 0$, que tiene como ecuación característica $m^2 - 4m + 4 = 0$

$$m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0$$

⇒ las soluciones de la ecuación característica son dos reales iguales: $m_1 = m_2 = 2$. Así la solución general de la E.D homogenea asociada es: $\boxed{y_c = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}}$

Tomamos $y_1 = e^{2x}$ y $y_2 = xe^{2x}$

Note que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones.

Queremos encontrar y_p solución particular de la E.D no homogénea.

Sea $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = u_1 e^{2x} + u_2 x e^{2x}$

$y_p' = u_1(2e^{2x}) + (e^{2x})u_1' + u_2(2xe^{2x} + e^{2x}) + (xe^{2x})u_2'$

$y_p'' = u_1(4e^{2x}) + (2e^{2x})u_1' + (e^{2x})u_1'' + u_1'(e^{2x})$
$+ u_2(4xe^{2x} + 6e^{2x}) + (2xe^{2x} + e^{2x})u_2' + (xe^{2x})u_2''$
$+ u_2'(2xe^{2x} + e^{2x})$

Escaneado con CamScanner

Reemplazamos:

$y'' - 4y' + 4y = u_1(4e^{2x}) + (2e^{2x}u_1') + (e^{2x})u_1' + \dots$

$u_1'(2e^{2x}) + u_2(4xe^{2x} + 6e^{2x}) + (2xe^{2x} + e^{2x})u_2'$

$+ (xe^{2x})u_2' + u_2'(2xe^{2x} + e^{2x})$

$- 4\left[u_1(2e^{2x}) + (e^{2x})u_1' + u_2(2xe^{2x} + e^{2x}) + (xe^{2x})u_2'\right]$

$+ 4(u_1y_1 + u_2y_2) = f(x)$

u_1 y u_2 se iguala a cero.

$\Rightarrow u_1(4e^{2x} - 4(2e^{2x}) + 4e^{2x}) + u_2(4xe^{2x} + 6e^{2x} +$

$-4(2xe^{2x} + e^{2x}) + 4(xe^{2x})] + \frac{d}{dx}(e^{2x}u_1') + \frac{d}{dx}(xe^{2x}u_2')$

$+ (2e^{2x})u_1' + (2xe^{2x} + e^{2x})u_2' - 4[(e^{2x})u_1' + (xe^{2x})u_2'] = f(x)$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{2x}u_1' + xe^{2x}u_2') + (2e^{2x})u_1' + (2xe^{2x} + e^{2x})u_2' - 4[(e^{2x})u_1' + (xe^{2x})u_2'] = f(x)$

Suponemos:

$e^{2x}u_1' + xe^{2x}u_2' = 0$

$\Rightarrow (2e^{2x})u_1' + (2xe^{2x} + e^{2x})u_2' = f(x)$

Así, tenemos el sistema:

$e^{2x}u_1' + xe^{2x}u_2' = 0$

$2e^{2x}u_1' + (2xe^{2x} + e^{2x})u_2 = f(x)$

hacer el wronskiano.

Escaneado con CamScanner

New tema:

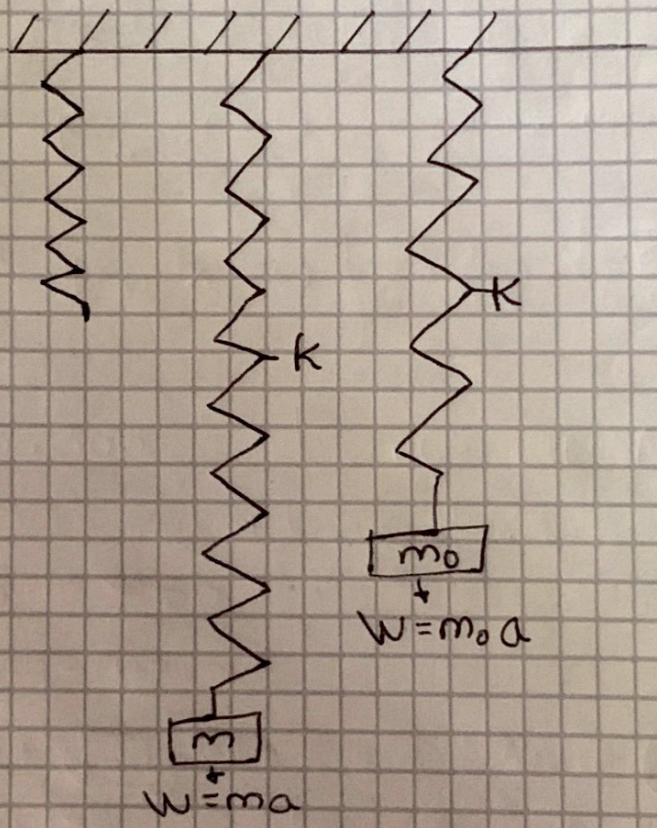
Algunos modelos con E.D. lineales unidad 5.

* Movimiento Oscilatorio (Periódico).

Definición: Mov. Periodico: es el movimiento de un cuerpo que se repite regularmente; el cuerpo regresa a una posición dada después de un intervalo fijo de tiempo.

Movimiento Armónico Simple (M.A.S):

Consideremos el siguiente resorte:



K: Constante elástica

No cambia para masas diferentes (Zoo pre es la misma).

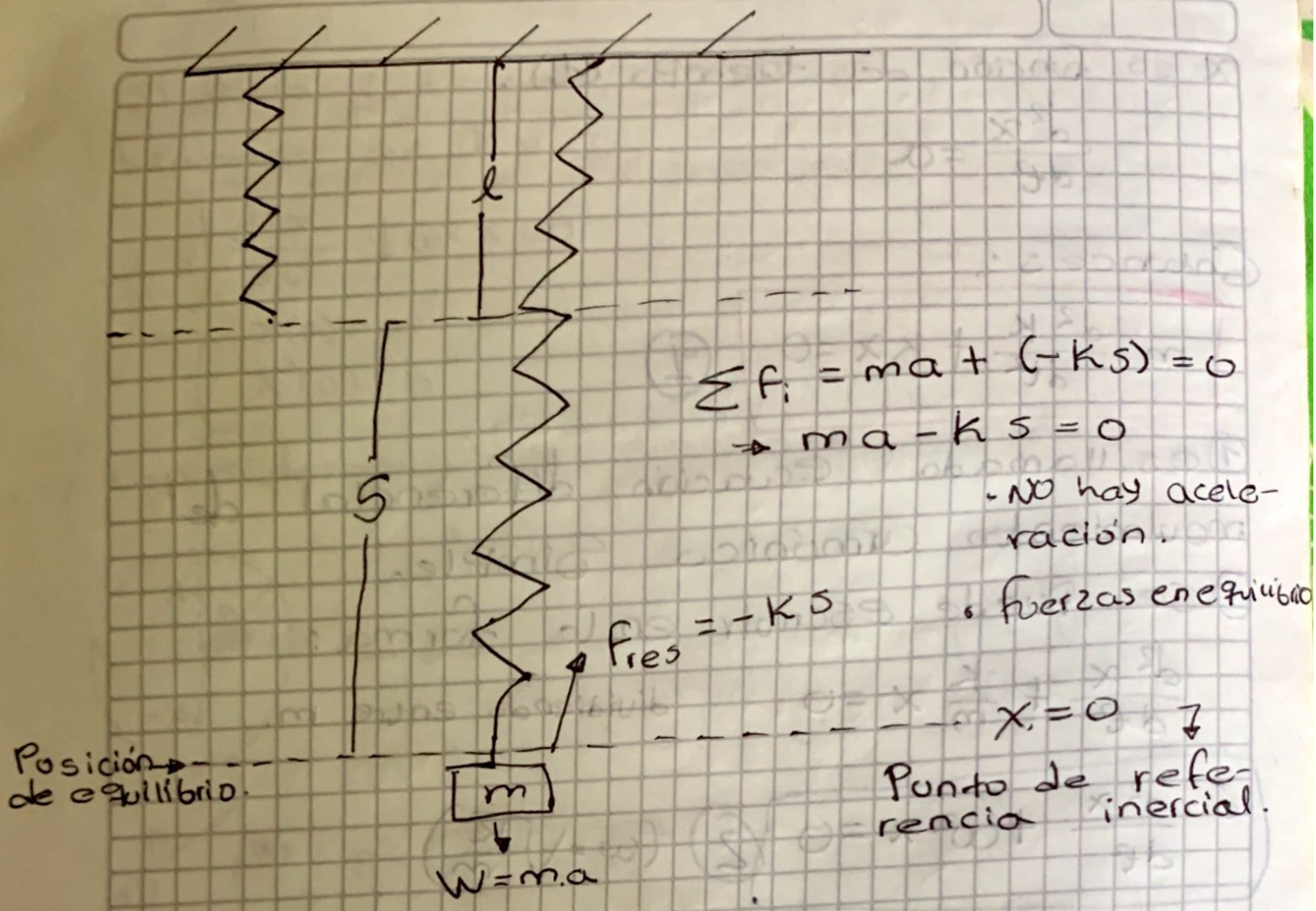
Ley de Hook: El resorte ejerce una fuerza f_{res} opuesta a la dirección del alargamiento y proporcional a la cantidad del alargamiento S. Es decir: $f_{res} = -kS$

f_{res}: fuerza de restitución

(*) **Condición de equilibrio:**

$\sum f_i = 0$

Escaneado con CamScanner



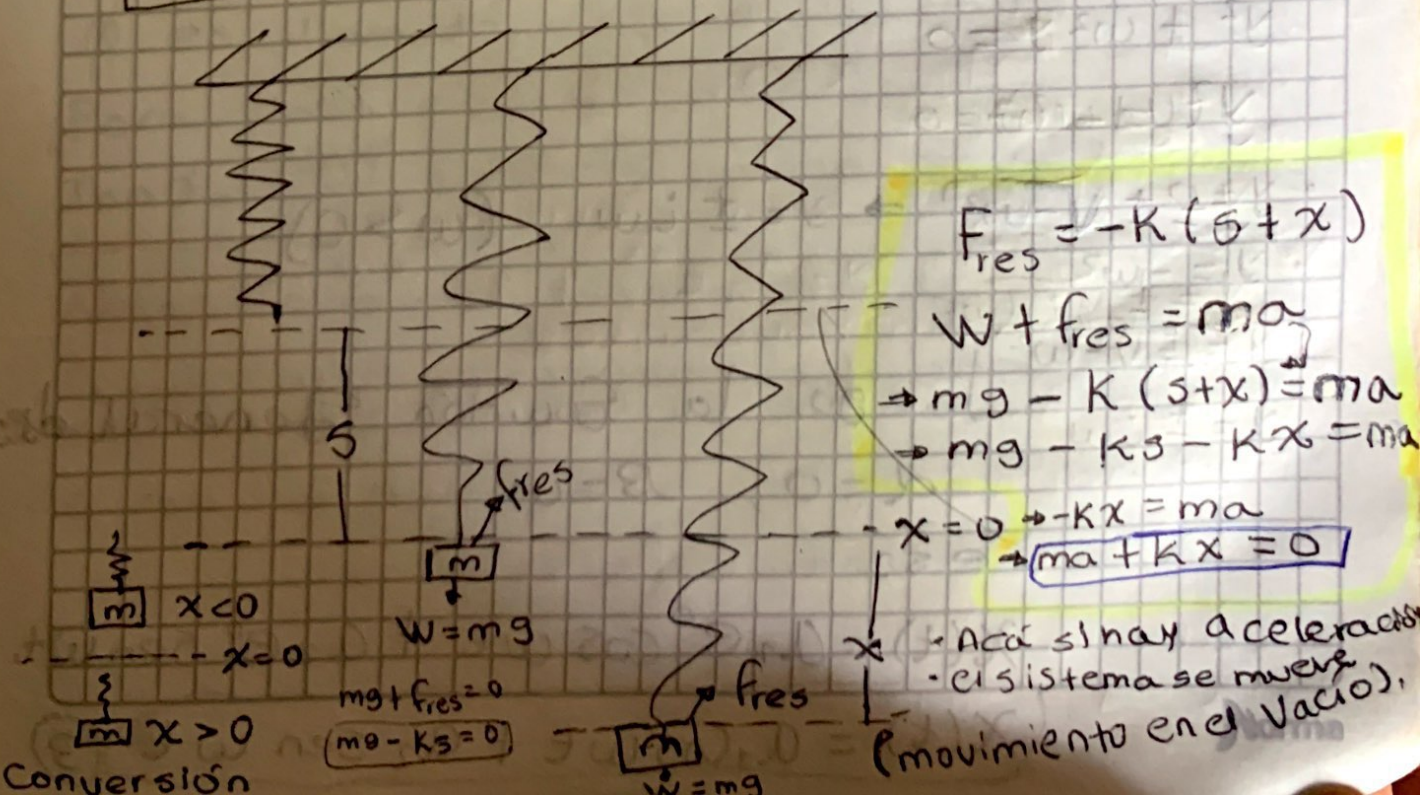
$\sum f_i = ma + (-ks) = 0$

$\rightarrow ma - ks = 0$

- NO hay aceleración.
- fuerzas en equilibrio

* Segunda Ley de Newton:

Variación del momentum $\rightarrow \boxed{\frac{dP}{dt} = ma = F_{neta}}$ P.: momentum



$F_{res} = -k(s+x)$

$W + f_{res} = ma$

$\rightarrow mg - k(s+x) = ma$

$\rightarrow mg - ks - kx = ma$

$\rightarrow -kx = ma$

$\rightarrow \boxed{ma + kx = 0}$

- Acá sí hay aceleración
- el sistema se mueve.

(movimiento en el Vacío).

Escaneado con CamScanner

x es función del tiempo (t):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a$$

Entonces:

$$m\frac{d^2K}{dt^2} + Kx = 0 \quad (1)$$

(1) es llamada ecuación diferencial del movimiento armónico Simple.

(1) Se puede escribir en la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0 \qquad \text{dividiendo entre } m.$$

$$\text{ó } \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (2) \qquad \left(\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}\right)$$

La ecuación (2) describe el M.A.S o movimiento libre no amortiguado.

$$y^2 + \omega^2 = 0$$

$$y^2 = -\omega^2$$

$$y = \pm\sqrt{-\omega^2} \Rightarrow y = \pm i\omega, \quad (\omega > 0)$$

Luego la solución general de (2)

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega$$

es:

$$x(t) = a_1 e^0 \cos \omega t + a_2 e^0 \operatorname{sen} \omega t$$

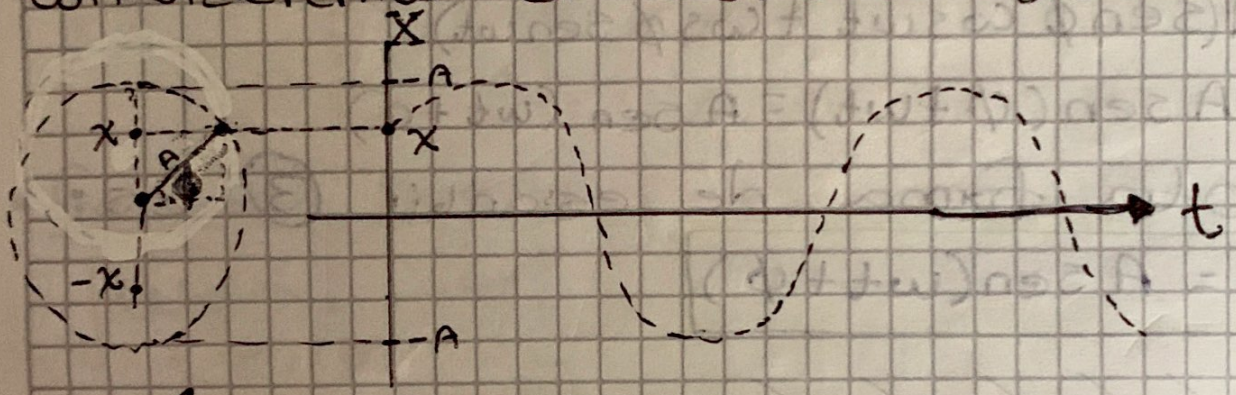
$$x(t) = a_1 \cos \omega t + a_2 \operatorname{sen} \omega t \quad (3)$$

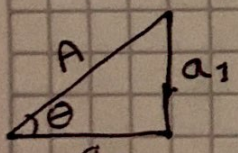
Escaneado con CamScanner

Si para (2) tenemos $x(0)=a$ y $x'(0)=b$, tenemos el P.V.I

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \\ x(0)=a \\ x'(0)=b \end{cases}$$

Consideremos el siguiente grafico:





$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\operatorname{Sen}\phi = \frac{a_1}{A} \Rightarrow a_1 = A\operatorname{Sen}\phi$$

$$\operatorname{Cos}\phi = \frac{a_2}{A} \Rightarrow a_2 = A\operatorname{Cos}\phi$$

ϕ es llamado ángulo de fase.

Para hallar el ángulo de fase:

$$\operatorname{Tan}\phi = \frac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{Cos}\phi} = \frac{a_1}{a_2} \; ; -\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{a_1}{a_2} < \frac{\pi}{2}, \quad a_2 \neq 0$$

Nota: En el movimiento circular uniforme $a_{cent} = \omega^2 A$, ω = velocidad angular.

Escaneado con CamScanner

DD MM AA

Recordemos:

- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
- $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$

Así, tenemos que:

$x(t) = a_1 \cos \omega t + a_2 \operatorname{sen} \omega t$

Suma de ángulos

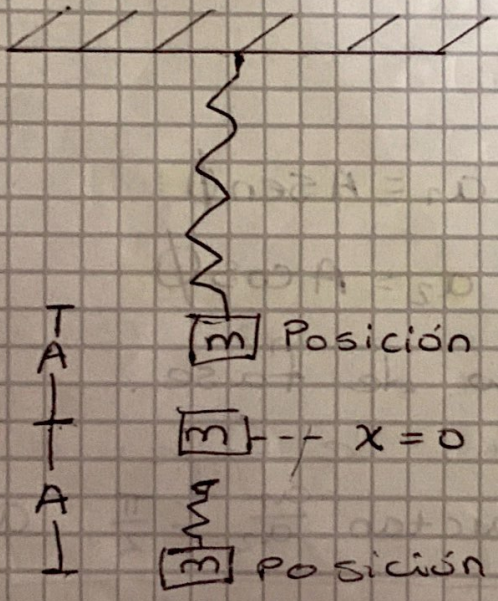
$x(t) = A \operatorname{sen}\phi \cos \omega t + A \cos\phi \operatorname{sen} \omega t$ { reemplazando los valores de a_1 y a_2:

$x(t) = A(\operatorname{sen}\phi \cos \omega t + \cos\phi \operatorname{sen} \omega t)$

$x(t) = A \operatorname{sen}(\phi + \omega t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$

Así, otra forma de escribir (3) es:

$$\boxed{x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)}$$



Conceptos Importantes

- **Amplitud A:** Es la distancia existente entre la Posición de equilibrio y cualquiera de las Posiciones extremas.
- **Oscilación:** Cuando una Partícula recorre una distancia de 4A se dice que realiza una oscilación (vibración).

Escaneado con CamScanner

- **Periodo (T):** Es el tiempo que emplea una partícula en realizar una oscilación y está dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- **frecuencia (f):** Es el número de oscilaciones que realiza un cuerpo en la unidad de tiempo:

$$f = \frac{1}{T}$$

- **frecuencia Angular (ω):**

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Escaneado con CamScanner

Ejercicio M.A.S.

Una masa que pesa 2 libras hace que un resorte se estire Medio Pie Cuando t=0, la masa Se Suelta desde un Punto 2/3 de Pie abajo de la Posición de equilibrio, con Una velocidad inicial hacia arriba de 4/3 P/s deduzca la Ecuación diferencial del M.A.S. y Su Solución. Determine también W, T, F, A. Bosqueje las gráficas de la función de Posición de la velocidad y aceleración de la masa.

Solución:

Datos:

$W = 2\,lb$

$x(0) = \frac{2}{3}$

$V_0 = x'(0) = -\frac{4}{3}$

$g = 32\ ft/s^2$

$m = ?$

$k = ?$

$f_{res} = -kx$

$W = m \cdot g \Rightarrow \boxed{m = \frac{W}{g}}$

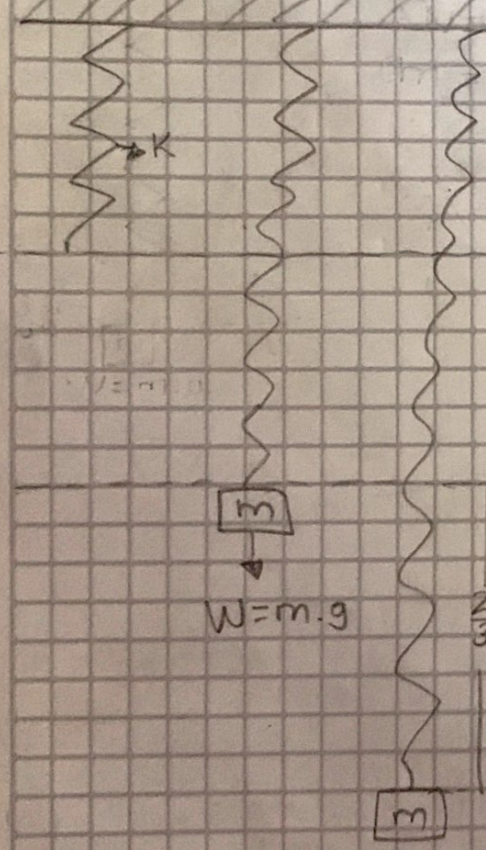
$\Rightarrow$ la masa: $2 = m(32)$

$\Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{16}}$

$-2lb = -K\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{K = 4}$ ↳ se estire medio pie

↳ Se calcula con la distancia de la Posición de equilibrio.



$ma + kx = 0$

$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$ → multiplicamos Por 16:

$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0}$ es de la forma: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

$\Rightarrow \omega^2 = 64 \Rightarrow \omega = 8\ \frac{rad}{s}$

Escaneado con CamScanner

la calculadora debe estar en radianes.

La ecuación característica de la E.D. es:

$$r^2 + 64 = 0$$

$\Rightarrow r = \pm\sqrt{-64} = \pm 8i$, luego $\alpha = 0$ y $\beta = 8$

La solución general de la E.D. es:

$$x(t) = a_1 \cos 8t + a_2 \operatorname{sen} 8t$$

P.V.I $\begin{cases} x(0) = \frac{2}{3}, \quad x'(0) = -\frac{4}{3}, \end{cases}$ tenemos:

$$a_1 \cos(8(0)) + a_2 \operatorname{sen}(8(0)) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{2}{3}}$$

$$x'(t) = -8a_1 \operatorname{sen} 8t + 8a_2 \cos 8t$$

$$\Rightarrow -8a_1 \operatorname{sen}(8(0)) + 8a_2 \cos(8(0)) = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 8a_2 = -\frac{4}{3} \Rightarrow a_2 = -\frac{4}{24}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_2 = -\frac{1}{6}}$$

Así, $\boxed{x(t) = \frac{2}{3}\cos 8t + \left(-\frac{1}{6}\right)\operatorname{sen} 8t}$

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{6}$$

$\boxed{a_1 = A \operatorname{sen}\phi}$, $\boxed{a_2 = A\cos\phi}$

$$x(t) = \frac{\sqrt{17}}{6}\operatorname{sen}\phi\cos 8t + \frac{\sqrt{17}}{6}\cos\phi\operatorname{sen} 8t$$

$$= \frac{\sqrt{17}}{6}(\operatorname{sen}\phi\cos 8t + \cos\phi\operatorname{sen} 8t)$$

$$= \frac{\sqrt{17}}{6}\operatorname{sen}(\phi + 8t)$$

$\phi = ?$

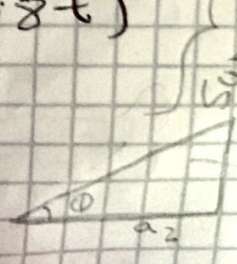
$$\operatorname{Tan}\phi = \frac{a_1}{a_2}$$

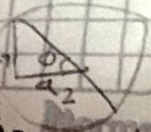
$$\Rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \arctan(-4) \approx -1{,}326$$

↳ Este no es el ángulo de fase

Puesto que contradice el que $\frac{a_1}{A} = \operatorname{sen}\phi > 0$, $\frac{a_2}{A} = \cos\phi < 0$

Signos de ángulos.





Escaneado con CamScanner

El ángulo de fase es el complementario, se le suma π:

El ángulo de fase es entonces:

$$\phi = \pi + (-1{,}326) \simeq 1{,}811 \text{ rad.}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

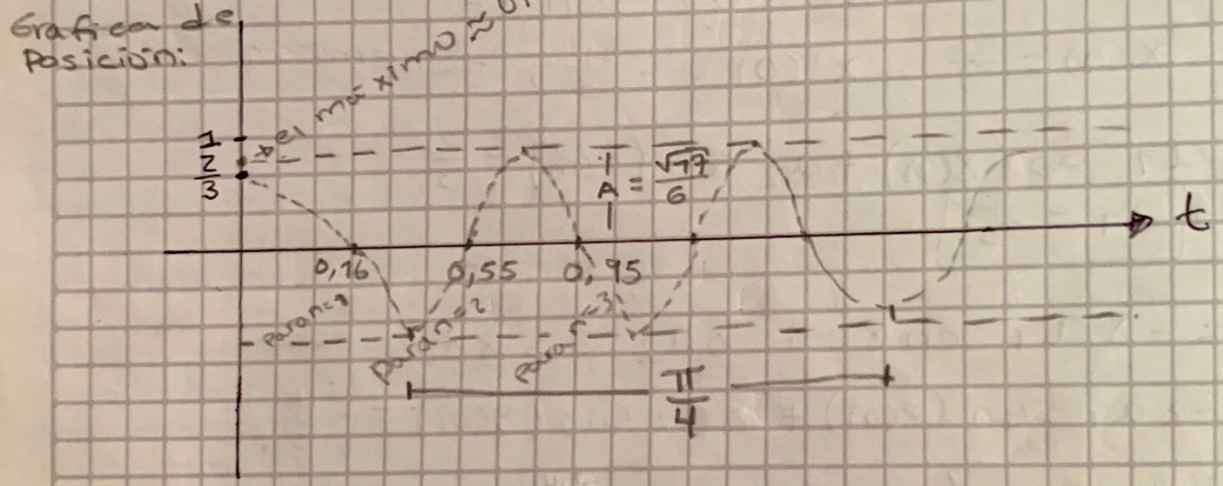
$$f = \frac{1}{T} = \frac{4}{\pi}$$

$$\phi + 8t = n\pi$$

$$t = \frac{n\pi - \phi}{8}$$

, dar valores a "n" para ubicar los puntos

Grafica de posición:

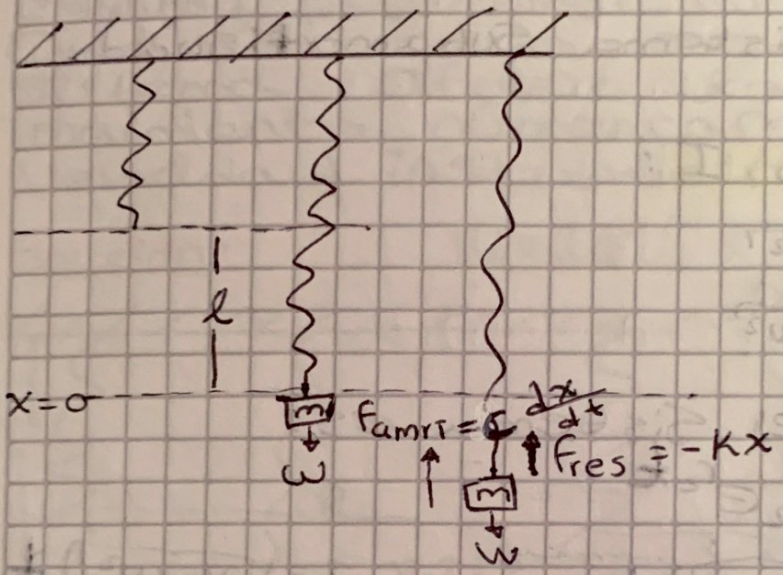


Hacer la de velocidad y aceleración.

Escaneado con CamScanner

E.D. del movimiento amortiguado

Nota: En mecánica clásica, se considera que las fuerzas de amortiguamiento que actúan sobre un cuerpo son proporcionales a la velocidad instantánea. ($f_{amr} = C\frac{dx}{dt}$)



Por la Segunda ley de Newton tenemos:

$$ma = f_{res} + f_{amor}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -C\frac{dx}{dt} - kx$$

Recuerden que: $(-k\ell + mg = 0)$

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + kx = 0} \quad \text{(no es M.A.S.)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0}$$

donde $2\lambda = \frac{C}{m}$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$

La ecuación auxilial:

$$\boxed{r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0}$$

$$\Rightarrow r = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{(2\lambda)^2 - 4\omega^2}}{2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

Escaneado con CamScanner

Tenemos 3 Casos:

- Caso I: $\lambda^2 - \omega^2 > 0$: Sistema Sobreamortiguado.
- Caso II: $\lambda^2 - \omega^2 = 0$: Sistema Críticamente amortiguado
- Caso III: $\lambda^2 - \omega^2 < 0$: Sistema Subamortiguado.

* Si tenemos el Caso I:

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$
$$r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

Luego la Solución del sistema es:

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$
$$x(t) = c_1 e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2})t} + c_2 e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2})t}$$

* Si tenemos el Caso II:

$$r_1 = r_2 = -\lambda$$

Luego la Solución del sistema es

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}$$
$$x(t) = c_1 e^{-\lambda t} + c_2 t e^{-\lambda t}$$

* Si tenemos el Caso III:

$$r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} \quad (\text{con } \lambda^2 - \omega^2 < 0)$$
$$r = -\lambda \pm \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, i$$
$$\alpha = -\lambda, \quad \beta = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$$

Luego la Solución del sistema es:

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \operatorname{Sen} \beta t$$
$$x(t) = c_1 e^{-\lambda t} \cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + c_2 e^{-\lambda t} \operatorname{sen} \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t$$

Escaneado con CamScanner

Ejemplo 2. M.A.S. Amortiguado:

Un objeto que Pesa 16 lb se une a un resorte de 5 pies de Longitud. En la Posición de equilibrio el resorte mide 8.2 pie. Si la masa se eleva y se suelta del reposo en un Punto a 2 Pies arriba de la Posición de equilibrio, determinar el desplazamiento $x(t)$. Considere que el medio que rodea al sistema ofrece una resistencia al movimiento numericamente igual a la velocidad instantanea.

Solución:

$W = 16\,lb$

$x(0) = -2$ (2 pies arriba de la posición de equilibrio es $x = 5\,ft$)

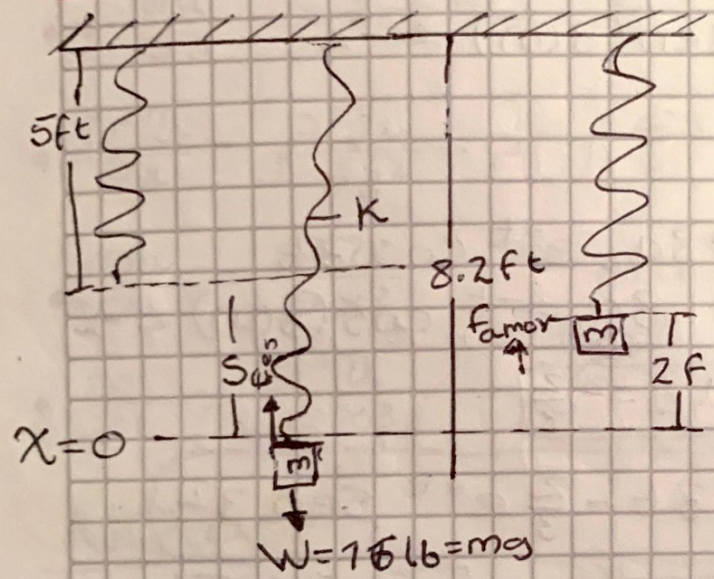
$V_0 = x'(0) = 0$

$K = ?$

$$f_{amo} = \frac{dx}{dt}$$

$m = ?$

$g = 32\ ft/s^2$



$f_{res} = -K(s)$

$5 + s = 8.2$

$\rightarrow s = 8.2 - 5$

$\boxed{s = 3.2}$

$f_{res} = -16\,lb = -K(3.2)$ $\Rightarrow \boxed{K = 5}$

$mg = m(32\ ft/s^2) = 16\,lb$

$\Rightarrow m = \frac{16\ lb}{32\ ft/s^2} = \frac{1}{2}\ slug$

$$ma + \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \div \text{entre } m:$$

$$\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0}$$

Escaneado con CamScanner

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2}{2} + \frac{\sqrt{(-1)(36)}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{-1}\sqrt{36}}{2}$

$= -1 \pm \frac{i\sqrt{36}}{2} = -1 \pm 3i$, $m_1 = -1+3i$, $m_2 = -1-3i$

La ecuación auxiliar es: $\alpha = -1, \beta = 3$.

$r^2 + 2r + 10 = 0$

$r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4(10)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = -1 \pm 3i$

Luego la Solución General es:

P.VI $\begin{cases} x(t) = a_1 e^{-t}\cos 3t + a_2 e^{-t}\operatorname{sen} 3t \\ \text{Como } x(0) = -2, \quad x'(0) = 0 \end{cases}$

$a_1 \cos(3(0)) + a_2 \operatorname{sen}(3(0)) = -2$

$\Rightarrow \boxed{a_1 = -2}$

$x'(t) = -3a_1 e^{-t}\operatorname{sen} 3t + 3a_2 e^{-t}\cos 3t$

$\Rightarrow -3a_1 e^{-t}\operatorname{sen}(3(0)) + 3a_2 e^{-t}\cos(3(0)) = -2$

$3a_2 = -2 \Rightarrow \boxed{a_2 = -\frac{2}{3}}$

Así, $\boxed{x(t) = -2e^{-t}\cos 3t - \frac{2}{3}e^{-t}\operatorname{sen} 3t}$

$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-\frac{2}{3})^2} = \sqrt{\frac{40}{9}} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$

$\tan\phi = \frac{a_1}{a_2} \Rightarrow$

$\phi = \arctan\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = [\arctan(3) + \pi] = 4.391$

$x(t) = \frac{2\sqrt{10}}{3} e^{-t}\operatorname{sen}(3t + 4.391)$

Escaneado con CamScanner

E.D.P ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES.

Recordemos: Una ecuación que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes es llamada E.D.P.

Definiciones: (Orden de una E.D.P) Se llama orden de una E.D.P. el orden superior de las derivadas parciales en la E.D.P.

Ejemplo:

- $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ es una E.D.P. de orden 1.
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ es una E.D.P de orden 2.
- $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ es una E.D.P. de orden 2
- $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ Es una E.D.P. de orden 3.

Nota:

$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x \partial y}$

Tres E.D.P's clásicos en física son:

$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ Ecuación de ondas

$u_t - K\Delta u = 0$ Ecuación de calor

$\Delta u = 0$ Ecuación de laPlace.

Definiciones: (orden de una E.D.P): Se llama orden de una E.D.P el orden superior de las derivadas parciales en la E.D.P.

En general una E.D.P tiene la forma:

$$f\left(x_1, x_2, \dots x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0 \quad (1)$$

Escaneado con CamScanner

Definición: (Solución de una E.D.P)

Consideremos la E.D.P (1). Una función u, que depende de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tal que al sustituir u y sus derivadas en (1), (1) se convierte en una identidad respecto a $x_1, x_1, \ldots, x_n$.

→ **Ejemplo:** Verifique la función u, definida por $u(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ es solución de la Ecuación de la Place.

$$f(x,y,z,u_{xx},u_{yy},u_{zz}) = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Solución:

- $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(2x) = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left[(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + x\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(2x)\right]$

$$= -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$= 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} - (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

- $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} - (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} - (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} - (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$+ 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} - (x^2+y^2-z^2)^{-3/2} + 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$- (x^2+y^2-z^2)^{-3/2}$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\,3(x^2+y^2+z^2) - 3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$= 3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$= 0$. Luego u es solución.

Escaneado con CamScanner

$u(x,y)=g(y)$ | $y'=e^x$ | $\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{\partial u}{\partial y}=g'(y)$ | $\frac{dy}{dx}=e^x$

$\frac{\partial u}{\partial x}=0$ | $y=e^x+c$

$y=k$

- **Ejemplo:**

Hallar la Solución $u=u(x,y)$ de la E.D.P $\frac{\partial u}{\partial x}=0$

Solución:

Si $\frac{\partial u}{\partial x}=0 \Rightarrow u(x,y)=\int \frac{\partial u}{\partial x}\,dx = \psi(y)$

$\boxed{u(x,y)=\psi(y)}$ donde ψ es arbitraria

(u no depende de x).

- **Ejemplo:** Resolver la E.D.P $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0$ $(u=u(x,y))$

Solución: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \rightarrow \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}=0$

Sea $V=\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial V}{\partial x}=0}$ $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$

$\Rightarrow V=\int \frac{\partial V}{\partial x}\,dx=\phi(y)$

$V(y)=\phi(y)=\frac{\partial u}{\partial y}$

$u(x,y)=\int \frac{\partial u}{\partial y}\,dy=\int \phi(y)\,dy+\psi(x)$ → constante con respecto a otra variable.

Tomando $\xi_1(y)=\int \phi(y)\,dy$, entonces escribimos:

$\boxed{u(x,y)=\xi_1(y)+\psi(x)}$

ξ_1 y ψ Son arbitrarias.

- **Ejemplo:** Encontrar $u=u(x,y)$, tal que $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=x+y^3$ con las condiciones de frontera $u(1,y)=2y^2-4y$ y $u(x,-2)=x+8$.

Solución:

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=x+y^3$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx=\int (x+y^3)\,dx$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2}{2}+y^3 x+\phi(y)$

$u(x,y)=\int \frac{\partial u}{\partial y}\,dy=\int\left(\frac{x^2}{2}+y^3 x+\phi(y)\right)dy$

$=\frac{x^2}{2}y+\frac{y^4}{4}x+\int \phi(y)\,dy+\psi(x)$

$\boxed{u(x,y)=\frac{x^2}{2}y+\frac{y^4}{4}x+\int \phi(y)\,dy+\psi(x)}$ (solución general)

Escaneado con CamScanner

Hacemos $w(y) = \int \psi(y)\,dy$

y Podemos escribir:

$$\boxed{u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{4}y^4 x + w(y) + \psi(x)} \quad (*)$$

- Como $u(1,y) = 2y^2 - 4y$, entonces:

$$\frac{y}{2} + \frac{y^4}{4} + w(y) + \psi(1) = 2y^2 - 4y$$

$$\Rightarrow w(y) = 2y^2 - 4y - \frac{y}{2} - \frac{y^4}{4} - \psi(1)$$

$$\Rightarrow \boxed{w(y) = -\frac{y^4}{4} + 2y^2 - \frac{9}{2}y - \psi(1)} \quad (\checkmark)$$

Reemplazamos $(\checkmark)$ en $(*)$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{4}y^4 x - \frac{y^4}{4} + 2y^2 - \frac{9}{2}y - \psi(1) + \psi(x)} \quad (**)$$

- Como $u(x,-2) = x + 8$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2(-2) + \frac{1}{4}(-2)^4 x - \frac{(-2)^4}{4} + 2(-2)^2 - \frac{9}{2}(-2) - \psi(1) + \psi(x) = x + 8$$

$$\Rightarrow -x^2 + 4x - 4 + 8 + 9 - \psi(1) + \psi(x) = x + 8$$

$$\boxed{\psi(x) = x^2 - 3x - 5 + \psi(1)} \quad (\checkmark)$$

Reemplazamos $(\checkmark)$ en $(**)$:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{4}y^4 x - \frac{y^4}{4} + 2y^2 - \frac{9}{2}y - \psi(1) + x^2 - 3x - 5 + \psi(1)$$

$$\boxed{u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{4}y^4 x - \frac{y^4}{4} + 2y^2 - \frac{9}{2}y + x^2 - 3x - 5}$$

Escaneado con CamScanner

Ejemplo: Consideremos la función u definida por $u(x,y) = -3y^3\varphi(x) - 6x + y$ donde $\varphi(x)$ es una función arbitraria de x. Encontrar una E.D.P de Primer orden para la que u es solución General.

Solución:

La idea es encontrar una E.D.P donde no aparece $\varphi(x)$ y u es sowción.

Tenemos $u(x,y) = -3y^3\varphi(x) - 6x + y$ ⊛

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -9y^2\varphi(x) + 1$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} - 1}{-9y^2}$$

De ⊛ tenemos:

$$\varphi(x) = \frac{u(x,y) + 6x - y}{-3y^3}$$

Pasos: derivamos ⊛ con respecto a y, despejamos $\varphi(x)$, luego, de ⊛ despejamos $\varphi(x)$, Por lo tanto se igualan los resultados.

Igualando estas ecuaciones, tenemos:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial y} - 1}{-9y^2} = \frac{u(x,y) + 6x - y}{-3y^3}$$

Multiplico por (-9) de ambos lados y queda:

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial u}{\partial y} - 1}{y^2} = \frac{3(u(x,y) + 6x - y)}{y^3}$$

Multiplico por (y^3) a ambos lados:

$$\Rightarrow y\frac{\partial u}{\partial y} - y = 3u(x,y) + 18x - 3y$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial y} - 3u(x,y) = 18x - 2y}$$

Escaneado con CamScanner

$$w'(x) = \frac{\partial w(x)}{\partial x}$$

Ejemplo: Encontrar una E.D.P que tenga como solución general a u definida por $u(x,y) = x\phi(y) + y w(x)$ donde ϕ y w son arbitrarias.

Solución:

Tenemos que $u(x,y) = x\phi(y) + y w(x)$ ①

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \phi(y) + y\frac{\partial w(x)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \phi(y) = \frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial w(x)}{\partial x}$$

Reemplazando en ① tenemos:

$$u(x,y) = x\left(\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial w(x)}{\partial x}\right) + y w(x)$$

$$u(x,y) = x\frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial w(x)}{\partial x} + y w(x)$$

$$u(x,y) - x\frac{\partial u}{\partial x} = -xy\frac{\partial w(x)}{\partial x} + y w(x)$$

Dividimos entre (y) a ambos lados de la Ec.

$$\frac{1}{y}\left[u(x,y) - x\frac{\partial u}{\partial x}\right] = -x\frac{\partial w(x)}{\partial x} + w(x)$$

porque no hay "y" para derivar.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{y}\left(u(x,y) - x\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left(-x\frac{\partial w(x)}{\partial x} + w(x)\right)$$

$$-\frac{1}{y^2}\left(u(x,y) - x\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - x\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x}\right) = 0$$

Multiplicamos por y^2:

$$\Rightarrow -\left(u(x,y) - x\frac{\partial u}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - x\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -u(x,y) + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - xy\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} = 0$$

Mutiplico por (-1):

$$xy\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} - x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + u(x,y) = 0$$

Escaneado con CamScanner

$$xy\,u_{yx} - x\,u_x - y\,u_y + u = 0$$

E.D.P. lineales de dos Variables de Primer Orden:

una E.D.P de 1er orden tiene la forma:

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y)\,u + D = 0$$

ó

$$A(x,y)\,u_x + B(x,y)\,u_y + C(x,y)\,u + D = 0$$

con $u = u(x,y)$

Pasos Para determinar una solución:

- Hacer $\frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y)}{A(x,y)}$ (*) (ecuación característica)

Si A y B son continuas y no se anulan simultaneamente en alguna región del Plano xy, entonces (*) tiene solución.

$\xi(x,y) = k$ (curva característica)

El cambio de variable:

$\xi = \xi(x,y)$

$\eta = y$ (o $\eta = x$)

nos lleva a una ecuación de las Variables (ξ, η). → Veamos: Si $\eta = y$, $u = (\xi, \eta)$

Por la regla de la cadena: derivamos 1 y 2:

$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta$; $u_x = u_\xi \xi_x$

Al reemplazar en (*)

$$A(x,y)\,u_\xi \xi_x + B(x,y)\left[u_\xi \xi_y + u_\eta\right] + C(x,y)\,u + D = 0$$

$$\Rightarrow A(x,y)\,u_\xi \xi_x + B(x,y)\,u_\xi \xi_y + B(x,y)\,u_\eta + C(x,y)\,u + D = 0$$

$$\Rightarrow u_\xi\left[A(x,y)\,\xi_x + B(x,y)\,\xi_y\right] + B(x,y)\,u_\eta + C(x,y)\,u + D = 0$$

Escaneado con CamScanner

Como $\xi(x,y) = K \Rightarrow \xi_x = \xi_y = 0$

$\Rightarrow A(x,y)\,\xi_x + B(x,y)\,\xi_y = 0$

$\Rightarrow \boxed{B(x,y)\,u_\eta + C(x,y)\,u + D = 0}$ (E.D.O de 1er orden)

$\Rightarrow$ Si $\eta = x$, tenemos:

$\boxed{u_x = u_\xi\,\xi_x + u_\eta}$; $\boxed{u_y = u_\xi\,\xi_y}$

Al reemplazar en (*):

$A(x,y)\left[u_\xi\,\xi_x + u_\eta\right] + B(x,y)\,u_\xi\,\xi_y + C(x,y)\,u + D = 0$

$A(x,y)\,u_\xi\,\xi_x + A(x,y)\,u_\eta + B(x,y)\,u_\xi\,\xi_y + C(x,y)\,u + D = 0$

$\Rightarrow u_\xi\left[A(x,y)\,\xi_x + B(x,y)\,\xi_y\right] + A(x,y)\,u_\eta + C(x,y)\,u + D = 0$

Como $\xi(x,y) = K \Rightarrow \xi_y = \xi_x = 0$

$\Rightarrow A(x,y)\,\xi_x + B(x,y)\,\xi_y = 0$

$\Rightarrow A(x,y)\,u_\eta + C(x,y)\,u + D = 0$ (E.D.O. lineal de primer grado)

EJEMPLO:

Resolver $y^2 u_y + u_x = 2xu$, $u = u(x,y)$

Solución:

$u_x + y^2 u_y - 2xu = 0$

$A(x,y) = 1$, $B(x,y) = y^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y)}{A(x,y)} = y^2$ (ecuación característica)

Escaneado con CamScanner

$\Rightarrow \frac{1}{y^2}dy = dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y^2}dy = \int dx \Rightarrow \int y^{-2}dy = \int dx$

$\Rightarrow -y^{-1} = x + k_1 \; ; \boxed{x + \frac{1}{y} = k}$

$\boxed{\xi(x,y) = x + \frac{1}{y} = k}$ (curva característica).

Cambio de variable:

$$\begin{cases} \xi = x + \frac{1}{y} \\ \eta = x \end{cases}$$

$u(\xi,\eta)$ $\begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \\ u_y = u_\xi \xi_y \end{cases}$

Reemplazando en la E.D.P:

$$u_\xi \xi_x + u_\eta + y^2[u_\xi \xi_y] - 2\eta u = 0$$

$$u_\xi[\xi_x + y^2 \xi_y] + u_\eta - 2\eta u = 0$$

Como $\xi(x,y) = x + \frac{1}{y} = k \Rightarrow \xi_x + y^2 \xi_y = 0$

$\Rightarrow \boxed{u_\eta - 2\eta u = 0}$ (E.D.O)

$\Rightarrow u_\eta = 2\eta u \Rightarrow \frac{u_\eta}{u} = 2\eta$

$\Rightarrow \int \frac{u_\eta}{u} d\eta = 2\int \eta \, d\eta$

$\Rightarrow \ln u = \eta^2 + \varphi(\xi)$

$u(\xi,\eta) = e^{\eta^2 + \varphi(\xi)} = e^{\varphi(\xi)} e^{\eta^2}$

$\Rightarrow \boxed{u(\xi,\eta) = V(\xi) e^{\eta^2}}$, $V(\xi) = e^{\varphi(\xi)}$

Escaneado con CamScanner

$\rightarrow \boxed{u(x,y) = V\left(x + \frac{1}{y}\right) e^{x^2}}$ (Solución General.

Con el cambio de variable:

$$\begin{cases} \xi = x + \frac{1}{y} \\ \eta = y \end{cases}$$

$u(\xi, \eta) \rightarrow u_x = u_\xi \xi_x$

$u(\xi, \eta) \rightarrow u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta$

Reemplazamos en la E.D.P:

$$u_\xi \xi_x + y^2 \left[u_\xi \xi_y + u_\eta\right] - 2xu = 0$$

$$\Rightarrow u_\xi \left[\xi_x + y^2 \xi_y\right] + y^2 u_\eta - 2xu = 0$$

Como $\xi(x,y) = x + \frac{1}{y} = k \Rightarrow \xi_x = \xi_y = 0$

$$\Rightarrow \xi_x + y^2 \xi_y = 0$$

$$\Rightarrow y^2 u_\eta - 2xu = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta^2 u_\eta - 2xu = 0} \text{ (E.D.O)}$$

Como: $\boxed{x + \frac{1}{y} = \xi}$ $\boxed{x = \xi - \frac{1}{y}} = \xi - \frac{1}{\eta}$

$$\Rightarrow \boxed{\eta^2 u_\eta - 2\left(\xi - \frac{1}{\eta}\right)u = 0}$$

$$\Rightarrow u_\eta = \left(\frac{2\xi}{\eta^2} - \frac{2}{\eta^3}\right)u$$

$$\Rightarrow \frac{u_\eta}{u} = \left(\frac{2\xi}{\eta^2} - \frac{2}{\eta^3}\right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{u_\eta}{u} d\eta = \int \left(\frac{2\xi}{\eta^2} - \frac{2}{\eta^3}\right) d\eta$$

Escaneado con CamScanner

$$\Rightarrow \ln u = -\frac{2\xi}{\eta} + \frac{1}{\eta^2} + \varphi(\xi)$$

$$\Rightarrow u = e^{-\frac{2\xi}{\eta} + \frac{1}{\eta^2} + \varphi(\xi)} = e^{\varphi(\xi)}\, e^{\frac{1}{\eta^2} - \frac{2\xi}{\eta}}$$

$$= V^*(\xi)\, e^{\frac{1}{\eta^2} - \frac{2\xi}{\eta}}, \quad V^*(\xi) = e^{\varphi(\xi)}$$

$$\boxed{u(\xi,\eta) = V^*(\xi)\, e^{\frac{1}{\eta^2} - \frac{2\xi}{\eta}}}$$

$$\xi = x + \frac{1}{y}, \quad \eta = y$$

$$u(x,y) = V^*\left(x + \frac{1}{y}\right) e^{\left[\frac{1}{y^2} - \frac{2\left(x+\frac{1}{y}\right)}{y}\right]}$$

$$\boxed{u(x,y) = V^*\left(x + \frac{1}{y}\right) e^{-\left(\frac{1}{y^2} + \frac{2x}{y}\right)}} \quad \text{(solución general)}$$

Nota: V y V^* definen la misma solución general.

Escaneado con CamScanner

DD MM AA

E.D.P. lineales en dos variables de Segundo orden.

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Hu + F = 0$$

$u = u(x, y)$.

- Si $d = B^2 - 4AC > 0$, la E.D.P es llamada hiperbólica.

Ejemplo: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ (E. de ondas)

- Si $d = B^2 - 4AC = 0$, la E.D.P es llamada Parabólica. Ejemplo: $u_t - k\nabla u = 0$ (E. de calor).

- Si $d = B^2 - 4AC < 0$, la E.D.P es llamada elíptica. Ej: $\Delta u = 0$ (E. de la Place).

Consultar sobre el método de Separación de variables aplicados a la Ecuación diferecial Parcial de 2do orden.

el proceso y ejemplo, traer ejemplo resolviendo la ecuación de onda.

Trabajo para el jueves.

Escaneado con CamScanner